

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
EKONOMICKÁ FAKULTA

KATEDRA FINANČÍ

Optimalizace akciového portfolia pomocí dynamického programování

Equity Portfolio Optimization by Dynamic Programming Method

Student: Tomáš Uvíra

Vedoucí diplomové práce: prof. Dr. Ing. Zdeněk Zmeškal

Ostrava 2013

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Tomáš Uvíra**
Studijní program: N6202 Hospodářská politika a správa
Studijní obor: 6202T010 Finance
Specializace: 00 Finance
Téma: Optimalizace akciového portfolia pomocí dynamického programování
Equity Portfolio Optimization by Dynamic Programming Method

Zásady pro vypracování:

1. Úvod
 2. Metody optimalizace akciových portfolií
 3. Popis metod dynamického programování
 4. Aplikace dynamického programování při optimalizaci akciového portfolia
 5. Závěr
- Seznam použité literatury
Seznam zkratk
Prohlášení o využití výsledků diplomové práce
Seznam příloh
Přílohy

Seznam doporučené odborné literatury:

- FABOZZI, F., S. FOCARDI a P. COLM. *Financial modeling of the equity market*. New Jersey: John Wiley, 2006. 651 p. ISBN 978-0471-69900-2.
- PFLUG, Georg a Werner ROMISCH. *Modeling measuring and managing risk*. Singapore: World scientific publishing Co. Pte., 2007. 286 p. ISBN 978-981-270-740-6.
- ZMEŠKAL, Z., D. DLUHOŠOVÁ a T. TICHÝ. *Finanční modely*. Praha: Ekopress, 2004. 236 s. ISBN 80-86119-87-4.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **prof. Dr. Ing. Zdeněk Zmeškal**

Datum zadání: 23.11.2012

Datum odevzdání: 26.04.2013



Ing. Iveta Ratmanová, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. Dr. Ing. Dana Dluhošová
děkanka fakulty

„Prohlašuji, že jsem celou práci, včetně všech příloh, vypracoval samostatně“.



V Ostravě 26. dubna 2013

.....

Obsah

1. Úvod	3
2. Metody optimalizace akciového portfolia	5
2.1. Charakteristika akcií	5
2.1.1. Dividendy	6
2.1.2. Výnosnost akcií	7
2.1.3. Ukazatele kapitálového trhu	8
2.2. Analýza akcií	9
2.2.1. Fundamentální analýza	9
2.2.2. Technická analýza	13
2.2.3. Psychologická analýza	16
2.3. Optimalizace akciového portfolia	17
2.3.1. Kategorizace finančních modelů	17
2.3.2. Historie teorie portfolia	18
2.3.3. Předpoklady a podstata modelu Harryho Markowitze	19
2.3.4. Očekávaný výnos portfolia	22
2.3.5. Riziko portfolia	23
2.3.6. Efektivní množina	24
2.3.7. Optimální portfolio	25
2.3.8. Alternativní přístup optimalizace portfolia – umožnění bezrizikového investování a vypůjčování	26
3. Popis metod dynamického programování	28
3.1. Popis a matematická formulace dynamického programování	28
3.1.1. Základní pojmy z teorie procesů	28
3.1.2. Podstata a účel dynamického programování	31
3.2. Příklady využití dynamického programování	32
3.2.1. Binomický model oceňování derivátů na akcie	32

3.2.2.	Binomický model oceňování derivátů na úrokové sazby.....	36
3.2.3.	Vícefázový portfolio model	37
3.2.4.	Vícefázový $QP(W)$ portfolio model	40
3.3.	Model dynamické optimalizace portfolia – flexibilní strategie.....	44
4.	Aplikace dynamického programování při optimalizaci akciového portfolia	50
4.1.	Zadání modelové situace vycházející z tržních podmínek	50
4.2.	Výpočet vstupních dat	52
4.3.	Postup při aplikaci flexibilní strategie v tržních podmínkách	57
4.3.1.	Stanovení optimálního portfolia v čase $t = 0$	57
4.3.2.	Vyvažování portfolia v časech $t = 1$ a $t = 2$	59
4.3.3.	Výsledné bohatství investora v čase T	64
4.4.	Porovnání flexibilní a pasivní strategie v tržních podmínkách	66
4.5.	Analýza výsledků dosažených aplikací flexibilní a pasivní strategie.....	67
4.5.1.	Flexibilní a pasivní strategie v tržních podmínkách.....	68
4.5.2.	Flexibilní a pasivní strategie při vysoké volatilitě trhu jako celku	69
4.5.3.	Flexibilní a pasivní strategie za předpokladu vysoké citlivosti akcií.....	70
4.6.	Shrnutí výsledků	71
5.	Závěr.....	74

Seznam použité literatury

Seznam zkratk

Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Seznam příloh

1. Úvod

Optimalizace portfolia je zásadní otázkou všech investorů při nákupu akcií. I když má každý investor jiné preference a jinou představu o optimálním portfoliu danou zkušenostmi, dostupnými informacemi, či znalostí finančních trhů, jedno mají všichni investoři společné. Společným cílem všech investorů je totiž maximalizace zisku a minimalizace rizika. K vytvoření optimálního portfolia mohou sloužit optimalizační modely.

Cílem diplomové práce je porovnání a posouzení výhodnosti flexibilní dynamické optimalizační strategie s pasivní strategií „*buy and hold*“ při optimalizaci akciového portfolia pro tři modelové situace v tříletém investičním horizontu, přičemž kritériem hodnocení je střední hodnota funkce užitku.

Diplomová práce je rozdělena do několika kapitol, ve kterých jsou popsány všechny nástroje a myšlenky, ze kterých model dynamické optimalizace vychází.

V první kapitole jsou popsány charakteristiky akcií, jejich členění dle různých hledisek a přístupy k akciovým analýzám. V další části této kapitoly je objasněna teorie portfolia a proveden detailní popis Markowitzova modelu optimalizace portfolia. V poslední části této kapitoly je popsán alternativní přístup k optimalizaci portfolia na základě Tobinova modelu.

Druhá kapitola se zabývá dynamickými procesy a modely. První část této kapitoly je věnována vysvětlení a matematické formulaci dynamického programování, založeného na Bellmanově principu. V další části této kapitoly jsou popsány příklady čtyř finančních modelů, založených na dynamickém programování, přičemž dva modely se týkají oceňování derivátů a další dva modely popisují přístupy k dynamické optimalizaci portfolia. V poslední části této kapitoly je navržen a matematicky formulován model určený k dynamické optimalizaci akciových portfolií.

Třetí kapitola této práce je věnována aplikaci dynamického modelu optimalizace akciových portfolií. Nejprve je popsána modelová situace vycházející z tržních podmínek. Na scénáři předpokládaných tržních podmínek je vysvětlen postup aplikace dynamického programování, jinak také označovaného jako flexibilní strategie při optimalizaci akciového portfolia. V první části aplikace je vytvořeno původní portfolio, které je tzv. „dopředným“ (forward) způsobem optimalizováno ve dvou fázích investičního horizontu. Výsledná střední hodnota bohatství při využití flexibilní strategie, vypočtena rekurentním (backward)

způsobem, je v další části této kapitoly porovnána s výslednou střední hodnotou bohatství, dosaženou aplikací pasivní strategie. Další část této kapitoly je věnována hlubší analýze výsledků dosažených využitím flexibilní a pasivní strategie při aplikaci modelových situací předpokládaných tržních podmínek, vysoké volatility tržního indexu a vysoké citlivosti akcií na tržním indexu. V poslední části této kapitoly je provedeno shrnutí dosažených výsledků.

2. Metody optimalizace akciového portfolia

První část kapitoly metody optimalizace akciového portfolia se bude zabývat popisem akcií a jejich analyzováním. Ve druhé části bude popsána teorie portfolia a zároveň bude vysvětlen Markowitzův přístup k optimalizaci portfolia.

2.1. Charakteristika akcií

Zákon č. 513/1991 Sb. obchodního zákoníku definuje akcii jako cenný papír, s nímž jsou spojena práva akcionáře jako společníka podílet se dle tohoto zákona na jejím řízení, zisku a likvidačním zůstatku při jejím zániku.

Dle finanční teorie jsou akcie finančními instrumenty, určenými zejména k dlouhodobému investování. Na rozdíl od investic do dluhopisů, jsou investice do akcií považovány za rizikovější. Důvodem je jednak vysoká volatilita akcií a také skutečnost, že budoucí výnosy z akcií nejsou předem známy. Vždy totiž záleží na hospodářském výsledku emitující společnosti. Dalším důvodem je například vypořádání akcií v případě likvidace teprve poté, až jsou vypořádány dluhové cenné papíry. Akcionář ve většině případů obdrží pouze mizivou část původního vkladu.

Akcie můžou být rozděleny dle několika hledisek uvedených v dalším textu. Pokud není uvedeno jinak, tato podkapitola vychází z publikací Jílek (2009) a Polách (1999)

Hledisko ztělesněného práva

Akcie kmenová – Vlastníci kmenových akcií mají veškerá práva spojená s vlastnictvím podílu ve společnosti; hlasovací právo, podíl na majetku a zisku společnosti, informační a kontrolní právo. Většina emitovaných akcií jsou právě kmenové akcie.

Akcie prioritní – Vlastník prioritních akcií nemá hlasovací právo na valné hromadě společnosti a nemá tak možnost ovlivňovat její činnost. Naopak má oproti majitelům kmenových akcií jistou výplatu podílu na zisku (dividendy), přičemž toto právo nepodléhá usnesení valné hromady. Společnost může emitovat prioritní akcie v maximální hodnotě 50% ze základního kapitálu. V případě, že společnost nedosahuje zisku, dojde k vyplacení dividendy v okamžiku, kdy zisk vytvoří, a to i za předchozí období, kdy dividendy nebyly vypláceny.

Podoba akcií

Listinná – tyto akcie existují v papírové podobě a akcionář je drží u sebe,

Zaknihovaná – akcie jsou registrovány v registru cenných papírů. V České republice vede tento registr centrální depozitář.

Hledisko převoditelnosti

Akcie na jméno – Akcie na jméno jsou spojeny s konkrétním akcionářem. Emitent nebo zprostředkovatel vede knihu akcionářů a k převodu akcií na jiného majitele dochází tzv. indosamentem. Změna majitele musí být schválena emitentem a musí být zapsána rovněž v knize akcionářů.

Akcie na majitele – Akcie na majitele nejsou spojeny s konkrétním akcionářem, jsou převoditelné pouhým předáním a emitent ani zprostředkovatel nevede žádnou evidenci akcionářů. V posledních letech můžeme vidět obrovské tlaky na omezování akcií na majitele. Tyto akcie totiž výrazně ztěžují boj proti nelegálním praktikám, daňovým únikům a podobně.

Hledisko sídla společnosti

Z tohoto hlediska rozlišujeme akcie tuzemské a cizozemské.

Hledisko obchodovatelnosti

Z hlediska obchodovatelnosti rozlišujeme akcie obchodované na burze nebo mezibankovním trhu, čili veřejně obchodovatelné a akcie neobchodovatelné na sekundárním trhu, tedy veřejně neobchodovatelné.

2.1.1. Dividendy

Dividendy jsou nástrojem k výplatě podílu na zisku akcionáři a jsou vypláceny pouze v případě, že je podnik ziskový. I v tomto případě ale dividendy nemusejí být vyplaceny a to zejména tehdy, když podnik plánuje rozsáhlou investiční činnost. Zadržení výplaty dividend je pak spojeno s budoucími příjmy ze současné investice a akcionáři mohou očekávat vyšší prospěch v dlouhodobém horizontu. V případě vyplácení dividend naopak může investor předpokládat zhoršení platební schopnosti podniku a nižší růst jeho hodnoty.

Dle zákona č. 513/1991 Sb. má akcionář právo na dividendu, kterou schválila na základě hospodářského výsledku valná hromada. Částka určená k výplatě dividend společnosti nesmí být vyšší, než je hospodářský výsledek běžného účetního období snížený o povinný příděl do rezervního fondu a o neuhrazené ztráty minulých let, a zvýšený o nerozdělený zisk minulých let a fondy vytvořené ze zisku. Rozhodným dnem pro výplatu dividendy je den konání valné hromady, která rozhodla o výplatě dividendy a její výši.

2.1.2. Výnosnost akcií

Investice do akcií přinášejí několik druhů výnosů. Jedná se zejména o dividendy zmíněné v předchozí podkapitole, dále kapitálový výnos, který souvisí s růstem ceny akcie během doby jejího držení a nakonec příjmy z prodeje nebo realizace předkupních práv. V této podkapitole budou uvedeny vybrané vztahy pro výpočet výnosů z akcií.

Držení po omezenou dobu

Výnosnost akcie v případě držení po omezenou dobu lze, jak bylo zmíněno výše, rozdělit na dvě složky. První složkou je dividendový výnos za období držení akcie, druhou složkou je kapitálová výnosnost.

$$P_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{D_i}{(1+R_E)^t} + \frac{P_n}{(1+R_E)^T}, \quad (2.1.1)$$

kde D_i je $n-1$ dividend za období držení akcie, P_0 je cena pořízení akcie, P_n je cena akcie na konci při prodeji, t je období výplaty dividendy, T je období, ve kterém je akcie prodána a R_E je výnosnost akcie.

Držení po neomezenou dobu

Existují dvě varianty výpočtu výnosnosti akcie při nekonečném držení. První varianta předpokládá konstantní výši dividendy a je vypočtena jako perpetuita.

$$R_E = \frac{D_i}{P_0}. \quad (2.1.2)$$

Za předpokladu, že hodnota dividendy v čase poroste tempem g , je vztah pro výpočet perpetuity pozměněn následovně:

$$R_E = \frac{D_i}{P_0} + g. \quad (2.1.3)$$

Celková výnosnost akcie

Je nejjednodušším a zároveň nejpoužívanějším výpočtem výnosnosti. Celková výnosnost je vypočtena pomocí vztahu:

$$R_E = \frac{(P_n - P_0) + D_i}{P_0}. \quad (2.1.4)$$

2.1.3. Ukazatele kapitálového trhu

Základními a zároveň nejčastěji používanými ukazateli kapitálového trhu jsou dle Dluhošová (2008) následující; Čistý zisk na akcii (Earnings Per Share), Index P/E (Price-Earnings Ratio) a Index P/B (Price-to-Book Ratio), výplatní poměr a dividendový výnos.

Čistý zisk na akcii

Pomocí tohoto ukazatele můžeme zjistit, jak velký zisk společnost vygenerovala na jednu akcii. V případě, že je hodnota čistého zisku na akcii vysoká, naláká tato akcie spoustu potenciálních investorů, čímž vzroste cena akcií tržní hodnota celé společnosti.

$$EPS = \frac{EAT}{\text{Počet ks kmenových akcií}} \quad (2.1.5)$$

kde *EAT* je zisk za účetní období.

Index P/E

Index P/E zahrnuje na rozdíl od dividendové výnosnosti také hodnotu zadrženého zisku. Přitom informace o celkovém zisku společnosti je důležitější, než o jeho části. Pokud akcionář očekává, že bude hodnota podniku v čase růst, měla by být hodnota indexu P/E vysoká a zároveň hodnota dividendového výnosu nízká. To ovšem může znamenat také skutečnost, že je akcie předražená. Nízká hodnota indexu P/E zase může znamenat dobrou příležitost k investici a zároveň riziko úpadku společnosti. Proto je potřeba při aplikaci analýzy pomocí indexu P/E například porovnávat P/E společnosti s P/E sektoru.

$$\frac{P}{E} = \frac{\text{tržní cena akcie}}{EPS}. \quad (2.1.6)$$

Index P/B

Index P/B porovnává tržní cenu akcie s její účetní hodnotou. Prosperující podnik by měl mít tržní hodnotu vyšší.

$$\frac{P}{B} = \frac{\text{tržní hodnota akcie}}{\text{účetní hodnota akcie}} \quad (2.1.7)$$

Výplatní poměr

Tento ukazatel poskytuje informaci o tom, jaká část zisku společnosti je vyplácená ve formě dividend a kolik zisku společnost zadržuje ke své investiční činnosti.

$$\text{Výplatní poměr} = \frac{\text{dividenda na kmenovou akcii}}{\text{čistý zisk na akcii}} \quad (2.1.8)$$

Dividendový výnos

Dividendový výnos určuje, jak vysoká je dividenda v poměru k tržní ceně akcie. V případě, že společnost vyplácí nízké dividendy, je investor ochoten přijmout tento fakt zejména z toho důvodu, že vysoký podíl zadrženého zisku společnost použije k investicím a zvyšuje tak hodnotu akcie.

$$\text{Dividendový výnos} = \frac{\text{dividenda na kmenovou akcii}}{\text{tržní cena akcie}} \quad (2.1.9)$$

2.2. Analýza akcií

V následující podkapitole budou vysvětleny jednotlivé teoretické přístupy k analýze akcií, jejich cíle a kritéria. Základním cílem těchto analýz je nalezení cenných papírů vhodných k nákupu či prodeji, nicméně každá z akciových analýz vychází z jiných přístupů, využívá jiné vstupní údaje a způsob použití je rovněž odlišný. Tato podkapitola, pokud nebude uvedeno jinak, bude vycházet zejména z publikací Musílek (2002) a Polách (1999).

2.2.1. Fundamentální analýza

Fundamentální analytici se snaží zejména o vyhodnocení současného obchodního stavu společnosti a o odhad její budoucí perspektivy, přičemž jejich základním cílem je dosažení kapitálového zisku. Výstupem práce fundamentálního analytika je odhad vnitřní hodnoty a porovnání této hodnoty s aktuální cenou akcie. Na základě této analýzy může analytik zjistit, zda je akcie podhodnocena a je vhodné ji koupit nebo zda je akcie nadhodnocena a je vhodné ji prodat, popřípadě že je akcie oceněna správně a je vhodné ji držet.

Fundamentální analýzu můžeme rozdělit do tří úrovní:

- globální analýza,
- odvětvová analýza,
- analýza jednotlivých společností.

Dle Musílek (2002) mají největší vliv na kurzy akcií makroekonomické veličiny, které jsou studovány a jejichž vlivy jsou hodnoceny v rámci globální analýzy.

Globální analýza

Globální analýza zahrnuje zkoumání vztahů mezi makroekonomickými veličinami a kurzy akcií. Dle Polách (1999) mají největší vliv na pohyb kurzu akcie následující veličiny:

- reálný výstup ekonomiky,
- fiskální politika,
- peněžní nabídka,
- úrokové sazby,
- inflace,
- mezinárodní pohyb kapitálu,
- ekonomické a politické šoky.

Reálný výstup ekonomiky je nutné sledovat zvláště z dlouhodobého a krátkodobého až střednědobého hlediska. Mnohými studiemi vlivu HDP na akciové trhy bylo zjištěno, že v dlouhodobém horizontu kopírují ceny akcií hospodářský cyklus. Důvodem je zejména optimismus na akciových trzích podmíněný ekonomickou prosperitou, nebo naopak pesimismus a negativní vývoj na trzích v období hospodářské recese.

Ve střednědobém horizontu je ale situace odlišná. Akciové kurzy totiž o několik měsíců předbíhají vývoj reálné ekonomiky a jsou proto považovány za jedny z nejspolehlivějších indikátorů vývoje ekonomiky. Vysvětlení, proč jsou akciové trhy indikátory vývoje ekonomiky, může podat jedna z následujících teorií:

- investoři se rozhodují na základě jimi očekávaného vývoje, nikoliv na základě současné situace,
- investoři se sice rozhodují na základě současné situace, nicméně zisk, zisková marže a další veličiny, které sledují, předbíhají reálný vývoj ekonomiky,
- změny kurzů akcií ovlivňují chování a rozhodování o výši výdajů spotřebitelů a podnikatelů. Tím je ovlivněn vývoj reálné ekonomiky,

- akciové trhy předbíhají ekonomický vývoj proto, že na ně působí vývoj peněžní nabídky, inflace a úrokových sazeb.

Vliv fiskální politiky se projevuje dvěma způsoby:

- zvyšování daní může způsobit snížení zisku společností a omezit tak růst těchto společností. Důsledkem je poté pokles kurzů jejich akcií. Snižování daní může působit opačně,
- emise vládních dluhových cenných papírů může vést ke zvyšování úrokových sazeb a odlivu investorů od rizikových investic k investicím do těchto dluhopisů. Následkem je omezení poptávky po akciích a propad jejich kurzů. Naopak vládní výdaje použité k nákupu produktů a služeb soukromých podniků může zvýšit jejich zisky. Zvyšování hodnoty firem povede k růstu akciových kurzů.

Vliv peněžní nabídky lze jednoduše vysvětlit efektem likvidity. V případě, že centrální banka zvýší peněžní nabídku při neměnné poptávce, budou investoři upravovat svá portfolia dodatečným nákupem akcií, a vzhledem k vyšší poptávce po akciích porostou akciové trhy. Vliv peněžní nabídky může být rovněž vysvětlen teorií transmisního mechanismu a teorií nepřímého vlivu na reálný výstup ekonomiky. Obě teorie vycházejí ze snižujících se úrokových sazeb a rostoucí atraktivitě akcií.

Změny úrokových sazeb mají k akciovým trhům inverzní vztah; jejich růst vede k poklesu akciových kurzů a pokles naopak k růstu akcií. Důvody mohou být následující:

- zvýšení úrokových sazeb zvyšuje požadovanou výnosovou míru a tím snižuje současnou hodnotu budoucích příjmů,
- zvýšení úrokové míry ztrátní dluhové cenné papíry a investoři jim dávají přednost před rizikovějšími akciemi,
- zvýšení úrokových sazeb zdražuje úvěry, což má za následek snížení investic firem. Vlivem nízkých investic firmám klesá rentabilita a jejich celková hodnota, tedy i hodnota akcií.

Inflace nemá dle ekonomické teorie žádný vliv na vývoj kurzů akcií. Empirické výzkumy však tuto teorii nepotvrzují a negativní vliv inflace na akciové kurzy vysvětlují dvěma způsoby:

- hypotéza daňového efektu naznačuje, že inflace ovlivňuje zisk po zdanění; vyšší odvody v důsledku inflace znamenají nižší zisk. Akciové kurzy poté klesají,
- hypotéza zprostředkovaného efektu říká, že inflace nemá přímý vliv na kurzy akcií. Vliv je pouze zprostředkovaný prostřednictvím peněžní poptávky.

Mezinárodní pohyb kapitálu souvisí s globalizací finančních trhů. Investoři přesouvají své investice z nadhodnocených trhů na trhy podhodnocené. Příliv zahraničního kapitálu znamená růst akciových kurzů a naopak.

Ekonomické a politické šoky mají významný vliv na akciové trhy. Jako příklad může být uvedena finanční krize v letech 2008 – 2009, kdy na špatnou hypoteční politiku USA doplatily i země, které měly zdravý finanční systém.

Odvětvová analýza

Odvětvová analýza slouží k nalezení tzv. růstových odvětví, která mají potenciál dosahovat vysokých zisků, ze kterých má investor prospěch ve formě dividendových či kapitálových zisků. Z hlediska citlivosti jsou odvětví rozlišována následovně:

- cyklická odvětví,
- anticyklická odvětví,
- neutrální odvětví.

Cyklická odvětví charakterizují vysoké kurzové nárůsty v době expanze a velké kurzové pády v době recese. Cyklická období nabízejí takové statky, jejichž nákup kupující v době recese raději odloží a firmy tak přicházejí o zisky. Důsledkem toho jsou propady cen akcií firem působících v cyklickém odvětví v období recese.

Anticyklická odvětví jsou naopak charakteristická vysokými kurzovými nárůsty v době recese a propady v době expanze. V době recese přecházejí kupující ke spotřebě statků tvořených tímto odvětvím na úkor statkům vytvořeným společnostmi působící v cyklickém odvětví.

Posledním typem je odvětví neutrální, která nejsou ovlivněna hospodářským cyklem. Jedná se zejména o statky nezbytné.

Odvětvová analýza zahrnuje rovněž odvětvovou strukturu, ve které firma působí. Může se jednat o strukturu monopolní, oligopolní a konkurenční. V případě monopolní a oligopolní

struktury je vzhledem ke stabilním tržbám a výnosům investice relativně bezpečná. Konkurenční prostředí se naopak vyznačuje proměnlivým chováním.

Analýza jednotlivých společností

Cílem této analýzy je stanovení vnitřní hodnoty akcie a dotvoření představy o ekonomické situaci firmy. Analýza jednotlivých společností zahrnuje zhodnocení tržní situace, firemní strategie, výhledu do budoucnosti, provedení finanční analýzy a stanovení vnitřní hodnoty společnosti. Vnitřní hodnota může být stanovena několika modely. Historické a bilanční modely jsou sice jednodušší, ale nejsou tak přesné, jako modely ziskové, dividendové a cash flow modely. Níže budou popsány pouze nejpoužívanější dividendové a ziskové modely.

Dividendové diskontní modely jsou založeny na principu současné hodnoty budoucích příjmů. Jedním z autorů dividendového diskontního modelu byl Myron J. Gordon, který vytvořil dividendový model, později označován jako Gordonův model. Vnitřní hodnota akcie je podle tohoto modelu stanovena jako perpetuita s konstantním růstem.

$$VH = \frac{D_1}{R-g}, \quad (2.2.1)$$

kde VH je vnitřní hodnota, D_1 je dividendy na konci prvního roku, R je požadovaná výnosová míra a g je míra růstu dividend.

Ziskové modely jsou založeny na indexu P/E a při provádění fundamentální analýzy jsou používány častěji, než zmíněné dividendové modely. Vnitřní hodnota akcie je na základě ziskového modelu vypočtena následovně:

$$VH = \frac{E_1}{\frac{P}{E}}, \quad (2.2.2)$$

kde E_1 je výše očekávaného zisku na akcii v následujícím roce.

2.2.2. Technická analýza

Technická analýza se na rozdíl od fundamentální analýzy orientuje především na historické ceny akcií a objemy obchodů. Vstupními daty pro provádění technické analýzy jsou tržní ceny akcií, indexy, objemy obchodů a technické indikátory. Dle technických analytiků je nemožné stanovit vnitřní hodnotu akcie a je potřeba zaměřit se na změny tržních cen jako indikátorů nabídky a poptávky.

Cílem technických analytiků je zejména odhad krátkodobých pohybů akcií, přičemž cena akcie není důležitá, stejně jako není důležité, o jakou akcii se jedná.

Důležitý je také názor technických analytiků, že kurzy akcií se pohybují v určitých trendech. Vždy existuje určitý směr pohybu a kurzové změny jsou na sobě závislé a nejsou náhodné. Dle technických analytiků jsou všechny potřebné informace uloženy v ceně akcie, přičemž nové informace jsou postupně trhem přijímány a je tvořena nová rovnovážná cena. Pokud je proces přizpůsobování včas odhalen, existuje velká pravděpodobnost výnosu.

Dalším předpokladem technické analýzy je fakt, že historická data mohou být použita k predikci budoucího vývoje akciových kurzů.

Od počátku 20. století se problematikou technické analýzy zabýval Charles H. Dow, který je právem považován za jejího zakladatele. Po jeho smrti byla teorie dále rozpracována a začala být označována jako Dowova teorie (Dow theory). Předpoklady Dowovy teorie jsou následující:

- Indexy odrážejí veškeré relevantní informace, jelikož na tyto informace reagují všichni tržní účastníci. Zprávy o náhodných událostech jsou trhem velmi rychle přijaty a trh tedy podává věrný obraz tržní situace.
- Trh se vyznačuje trendovým chováním. Primární trend se vyznačuje velkými vzestupnými a sestupnými pohyby, které trvají rok a více. Sekundární trend se vyznačuje méně významným kolísáním v délce od tří měsíců po jeden rok. Terciální trend, jehož délka je v rozsahu několika dní, je dle Dowovy teorie vzhledem k velké volatilitě akcií nevýznamný.
- Budoucí chování akciových kurzů lze odvodit z historické tržní situace. V případě, že každý vzestup kurzu dosáhne vyšší úrovně, než předchozí vzestup a zároveň každý pád je zastaven na vyšší úrovni, než předchozí pád, jedná se o tzv. býčí trh. Analogicky lze vysvětlit opačný trend, tedy v případě, že každý pád kurzu je hlubší, než předchozí pád a každý vzestup pokoří nižší hranici než předchozí vzestup, jedná se o tzv. medvědí trh.
- Objemy obchodů potvrzují trend. V případě býčího trendu by měly objemy obchodů stoupat a naopak.
- Trend trvá až k jasnému obratu.

Technická analýza je souborem spousty metod, přičemž tyto metody lze rozdělit na metody grafické a metody založené na technických indikátorech.

Grafické metody

Grafické metody jsou používány zejména ke dvěma účelům. Analytik se pomocí grafů, ve kterých jsou zanesena historická data, snaží odhadnout trend trhu, případně hledá nákupní nebo prodejní signály. Analytici využívající grafické metody jsou označováni jako chartisté.

Při grafických metodách jsou používány tři typy grafů. Čárové grafy zaznamenávají pouze denní uzavírací kurzy, které jsou spojovány čarou. Sloupkové grafy již uvádějí více informací, ze kterých může investor čerpat a provádět závěry. Těmito informacemi jsou denní maximum, denní minimum a uzavírací kurz. Posledním typem grafů jsou tzv. points of figure charts, které k sloupkovým grafům přidávají informaci o otevíracím kurzu.

Chartisté vytvořili na základě historických informací tzv. standardizované formace, které jsou členěny na formace vedoucí ke změně trendu a formace potvrzující trend. Mezi nejznámější formace patří „M-V formace“, „Vlajková formace“, „Trojúhelníková formace“ a „Pravouhelníková formace“.

Metody založené na technických indikátorech

Smyslem technických indikátorů je analýza tržních, cenových a objemových charakteristik akciového trhu nebo jednotlivých akcií. V následujícím textu budou popsány vybrané technické indikátory.

Šíře trhu je indikátor sledující počet akcií, které v určitém období vzrostl a klesl. Výsledné hodnoty jsou poté porovnány s vývojem akciového indexu.

Dalším indikátorem sledující objem akcií je indikátor nová maxima a minima, který sleduje počet akcií s novými maximálními a minimálními kurzy. Větší objem nových maximálních kurzů naznačuje rostoucí trend.

Velmi oblíbeným indikátorem jsou klouzavé průměry, které se využívají k rozeznání směru a míry pohybu akciových kurzů. Často používaným klouzavým průměrem je 38denní a 200denní jednoduchý klouzavý průměr (moving average). Tento indikátor dává analytikovi nákupní a prodejní signály; v případě protnutí 200denního 38denním zespod jde o signál k nákupu a naopak při protnutí shora jde o signál k prodeji. Bolingerova pásma představují

25denní klouzavý průměr, kolem kterého jsou zaznačeny směrodatné odchylky. V případě, že je kurz blízko spodní hranice, jedná se o nákupní signál a naopak při kurzu v oblasti horní hranice jde o signál k prodeji.

Relativní síla podává informaci o chování sledované akcie v porovnání k jiným akciím nebo celému trhu. Pokud stoupne kurz sledované akcie více, než kurzy jiných akcií či trhu, jedná se o relativně silnou akcii.

Momentum je nástrojem používaným k odhadu změny trendu. Po změně trendu ze vzestupného na sestupný nejprve přichází rychlý pád kurzu. Jeho rychlost ale s časem klesá tím více, čím blíže se nachází u lokálního minima. Po překročení lokálního minima opět nastává rychlý kurzový vzestup. Indikátor momentum by měl upozornit na tyto změny.

2.2.3. Psychologická analýza

Psychologická analýza je založena na předpokladu, že velmi významným faktorem ovlivňujícím kurzy akcií, jsou psychologické reakce investorů. Do dnešní doby vznikly tři základní teorie zabývající se psychologickou analýzou:

- Keynesova investiční psychologie,
- Kostolanyho burzovní psychologie,
- Teorie bublin.

Keynesova teorie považuje za hlavní kurzotvorný faktor subjektivní chování investičního publika. Investoři se podle Keynesa rozhodují na základě toho, jak by se dle jejich názoru rozhodla většina investorů, tzv. kolektivní psychologie. Tyto investory označuje jako spekulanty. Druhou skupinu investičního publika, která vychází při nákupu akcií z očekávaných příjmů z akcie po celou dobu její životnosti, označuje jako podnikavce.

Keynes doporučoval omezení likvidity amerických akciových trhů, protože se domníval, že vysoká likvidita podporuje spekulanty, přičemž ti by neměli převyšovat podnikavce.

Další významnou teorií je Kostolanyho burzovní teorie. Kostolany rovněž rozděluje investiční publikum na dvě skupiny. Spekulanti jsou dle Kostolanyho investoři s vlastními představami, nejsou ovlivněni emocemi a investují do argumenty podložených instrumentů. Hráči naopak investují na základě „horkých tipů“ a chovají se velmi emocionálně. Signálem

k nákupu je pro hráče to, že všichni ostatní nakupují. Hráči dle Kostolanyho tvoří až 90% burzovního publika.

Podle toho, kdo převažuje na trhu, rozlišuje Kostolany trh v pevných a roztřesených rukou. Na trhu v pevných rukou jsou v převážné míře spekulanti, trh v roztřesených rukou je trh hráčů.

Teorie bublin předpokládá, že se v střednědobém až dlouhodobém horizontu kurzy akcií začnou odchylovat od své vnitřní hodnoty. V určité chvíli nastane splasknutí bubliny a propad akciových kurzů zpět ke své vnitřní hodnotě.

2.3. Optimalizace akciového portfolia

V podkapitole zabývající optimalizací akciového portfolia budou nejprve kategorizovány finanční modely dle různých hledisek, poté bude stručně popsána historie teorie portfolia a následně bude detailně popsán Markowitzův model. V poslední části bude popsán jeden alternativní model vycházející z Markowitzova přístupu.

2.3.1. Kategorizace finančních modelů

Finanční modely lze dle Zmeškal (2004) rozdělit dle celé řady kritérií do několika kategorií.

Rozdělení dle finančních aplikací

Podle sféry aplikace rozlišujeme modely nefinančních institucí, jako jsou například výrobní podniky, a modely finančních institucí, což jsou zejména banky a pojišťovny.

Podle finančních instrumentů – akcie, burzovní indexy, instrumenty s pevnými příjmy, měnové kurzy, komodity, opce a termínové kontrakty.

Podle typu finančních úvah rozlišujeme modely určené k finančnímu plánování, investičnímu rozhodování, finanční analýze, oceňování finančních instrumentů, tvorbě portfolia a predikci budoucího vývoje finančních veličin.

Rozdělení dle rozhodovacího prostředí

Dle rozhodovacího prostředí rozlišujeme modely následovně:

- deterministické modely, u kterých lze parametry stanovit jednoznačně jako reálná čísla,
- stochastické modely, kde jsou vstupní data stanovena pomocí rozdělení pravděpodobnosti,
- modely za nejistoty, kde nelze vstupní data stanovit jinak, nežli pomocí mezních hodnot, či intervalů,
- modely fuzzy-stochastické, což jsou modely kombinující předchozí přístupy.

Charakteristika matematických modelů

Podle způsobu vymezení vstupních podmínek jsou rozlišovány modely variantní a optimalizační. V případě variantních modelů je pro přesně vymezený scénář hledáno řešení a chování finančního systému, v případě optimalizačních modelů je hledáno optimální řešení pro dané meze parametrů.

Podle projekce času jsou rozlišovány modely statické a dynamické, přičemž dynamické modely zohledňují vývoj a rozhodnutí pro více období.

Dle frekvence zachycení reality rozlišujeme diskrétní modely snímající realitu v přesně daných intervalech a modely spojitě zachycující realitu v nekonečně malých intervalech.

Podle typu závislosti mezi finančními veličinami rozlišujeme modely lineární a nelineární.

Podle matematického způsobu řešení jsou modely rozlišovány na modely analytické, které jsou odvozeny vzorcem, numerické, jež jsou odvozeny pomocí aproximace a modely simulační, tedy generující náhodné scénáře.

2.3.2. Historie teorie portfolia

Základním východiskem všech modelů zabývajících se optimalizací portfolia je teorie portfolia. Teorie portfolia byla v průběhu 20. století velice populární zejména v USA. Zde se její autoři spolupodíleli nejen na probuzení zájmu amerických občanů o investice na kapitálových trzích, ale rovněž na rozvoji samotných kapitálových trhů. I dnes, v době globalizace, je americký finanční trh jedním z nejrozvinutějších finančních trhů na světě.

Jedním z prvních autorů zabývajících se teorií portfolia byl Harry Markowitz, který již v roce 1952 ukázal, že lze zkonstruovat efektivní hranici portfolií. Tato hranice znázorňuje různé kombinace výnosu a rizika, přičemž není možné zvýšit úroveň výnosu, aniž by se

nezvýšila úroveň rizika. Jinak řečeno za dané úrovně rizika, nelze dosáhnout vyššího výnosu. Markowitzův model však v polovině 20. století nebyl příliš využíván a to zejména z důvodu obtížnosti jeho aplikace. O jedenáct let později, v roce 1963, prezentoval William Sharpe zjednodušenou verzi Markowitzova modelu, nazvanou *model jednoho indexu*, který mohl být jednoduše aplikován.

V 60. letech byl Markowitzův model dále zkoumán zejména v souvislosti s oceňováním kapitálových aktiv. Výsledkem tohoto zkoumání byl *model oceňování kapitálových aktiv*, celosvětově známý jako CAPM (podle počátečních písmen anglického názvu *Capital Asset Pricing Model*), který nezávisle na sobě vyvinuli tři ekonomové; William Sharpe, John Lintner a Jan Mossin. Jílek (2009)

Všechny zmíněné modely jsou označovány jako *mean-variance* modely jelikož obsahují dvě základní složky; střední hodnotu (*mean*) znázorňující výnosnost portfolia a rozptyl (*variance*) znázorňující míru rizika. Všechny tyto modely navíc vycházejí z práce Harryho Markowitze, jež bude popsána v dalším textu.

2.3.3. Předpoklady a podstata modelu Harryho Markowitze

Harry Markowitz svou teorií portfolia odpověděl na otázku, zda lze celkové riziko portfolia určit pouhým součtem rizik dílčích instrumentů v portfoliu, stanovil koncepci diverzifikace portfolia a ukázal, jak diverzifikace portfolia redukuje rizika investorů. Markowitzův model je založen na následujících předpokladech:

- investoři jsou rizikově averzní,
- všichni investoři investují na stejně dlouhé období,
- investiční rozhodování je realizováno na základě očekávaných užitků,
- investoři vytvářejí svá investiční rozhodnutí na základě očekávaného výnosu a rizika, které je stanoveno prostřednictvím směrodatné odchylky,
- existence efektivního kapitálového trhu. Musílek (2002)

Dle Zmeškal (2004) navíc není dovolen krátký prodej a investor může investovat pouze do rizikových aktiv.

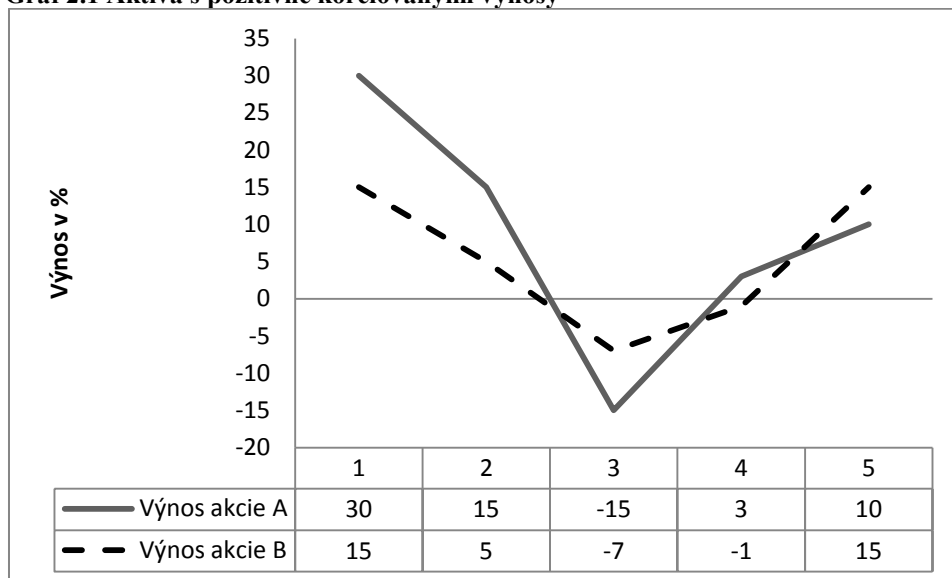
Riziko celého portfolia je podle Markowitzova modelu ovlivněno zejména mírou korelace pohybu výnosů jednotlivých aktiv v portfoliu.

Aktiva s pozitivně korelovanými výnosy

Výnos aktiva i se v čase pohybuje přesně tak, jako výnos aktiva j . V případě investování do aktiv s pozitivně korelovanými výnosy investor nediversifikuje portfolio a výsledný efekt je stejný, jako kdyby investoval pouze do jednoho aktiva. Musílek (2002)

Pohyb výnosů pozitivně korelovaných aktiv v čase znázorňuje graf 2.1.

Graf 2.1 Aktiva s pozitivně korelovanými výnosy



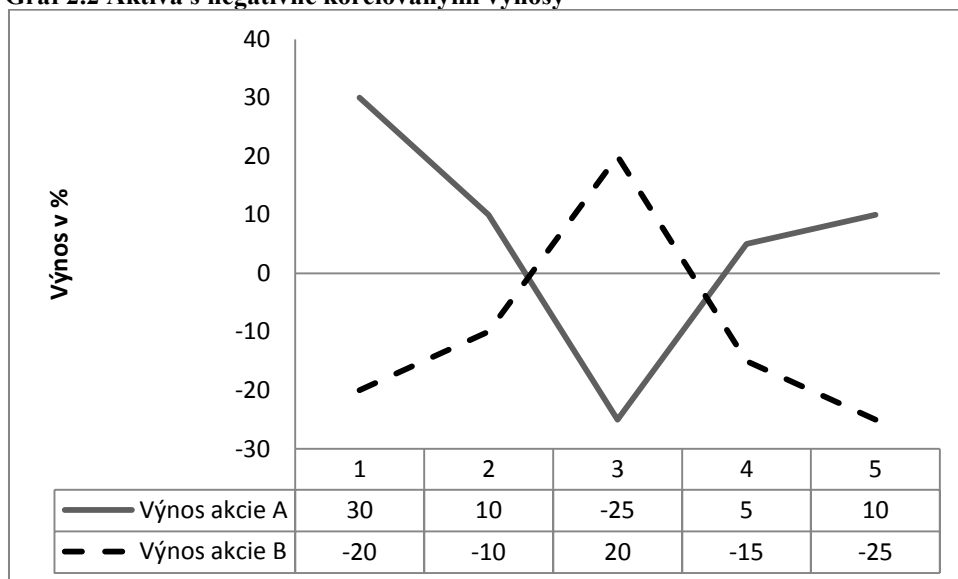
Zdroj: Polách, J. *Kapitálové trhy*, s. 119

Aktiva s negativně korelovanými výnosy

Výnos aktiva i se v čase pohybuje inverzně k výnosu aktiva j . Vhodně sestavené portfolio se vyznačuje následující tezí; jestliže je u jednoho instrumentu velká pravděpodobnost vysokého výnosu, nesmí být doprovázena velkou pravděpodobností výnosu jiného instrumentu. V případě, že by tato podmínka nebyla splněna, hrozí riziko velké ztráty. Pokud tedy investor nakupuje negativně korelovaná aktiva, lze hovořit o diverzifikaci.

Pohyb výnosů negativně korelovaných aktiv znázorňuje graf 2.2.

Graf 2.2 Aktiva s negativně korelovanými výnosy



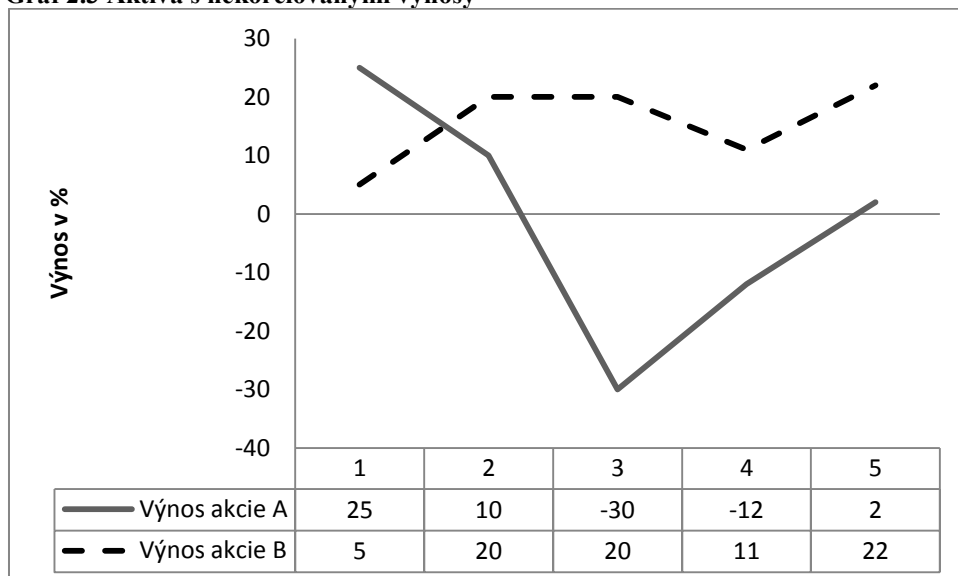
Zdroj: Polách, J. *Kapitálové trhy*, s. 119

Aktiva s nekorelovanými výnosy

Výnosy takovýchto aktiv nejsou v žádném vztahu a odstraňují tak nevýhodu aktiv s negativně korelovanými výnosy. Totiž v případě, že investor nakoupí dvě aktiva, která jsou perfektně negativně korelována v poměru 50:50, je sice velmi pravděpodobné, že významně sníží riziko portfolia, zároveň ale snižuje pravděpodobnost očekávaného výnosu na minimum.

Pohyb výnosů nekorelovaných aktiv znázorňuje graf 2.3

Graf 2.3 Aktiva s nekorelovanými výnosy



Zdroj: Polách, J., *Kapitálové trhy*, s. 120

„Jestliže chce investor snížit celkové riziko portfolia, pak v něm musí kombinovat taková aktiva, která nejsou perfektně pozitivně korelovaná.“ Takto lze shrnout podstatu Markowitzova modelu podle Musílek (2002), s. 245.

2.3.4. Očekávaný výnos portfolia

Očekávaný výnos portfolia lze vypočítat jako vážený průměr výnosů jednotlivých složek portfolia (instrumentů). Vahami jsou podíly jednotlivých instrumentů na celkovém portfoliu,

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot E(R_i), \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3.1)$$

kde $E(R_p)$ je očekávaný výnos portfolia, x_i je podíl i -tého instrumentu na celkovém portfoliu a $E(R_i)$ je očekávaný výnos i -tého instrumentu.

Aby bylo možné vypočítat očekávaný výnos portfolia, je ještě potřeba uvést vztah pro výpočet očekávaného výnosu jednotlivých instrumentů. Ten je možné vypočítat dvěma způsoby a to pomocí diskrétní nebo spojitě funkce. V prvním kroku výpočtu je nutné propočítat denní (měsíční, roční, aj.) diskrétní, či spojitě výnosy. V případě diskrétních výnosů je vzorec následující:

$$R_i = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}, \quad (2.3.2)$$

kde R_i je výnos daného aktiva, P_{t+1} je cena aktiva v čase $t+1$ a P_t je cena aktiva v čase t . V dalším kroku je potřeba vypočítat průměrný výnos dle vztahu:

$$E(R_i) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N R_i, \quad (2.3.3)$$

kde $E(R_i)$ je průměrný nebo také očekávaný výnos aktiva i a N je počet uzavíracích kurzů tohoto aktiva.

Ze vztahu (2.2.1) vyplývá, že pokud chce mít investor maximální zisk, měl by ve svém portfoliu držet pouze jeden cenný papír s nejvyšší očekávanou výnosností. Tento pohled ale není zcela správný, jelikož držení jednoho cenného papíru s sebou nese velké riziko. Diverzifikace portfolia je jednou z možností, jak toto riziko zásadně snížit.

2.3.5. Riziko portfolia

Riziko je ve financích obecně určováno rozptylem nebo častěji jeho odmocninou, směrodatnou odchylkou. Jak uvádí Sharpe (1990), směrodatná odchylka je odhadem pravděpodobné odchylky skutečné výnosnosti od výnosnosti očekávané.

Riziko portfolia není jako v případě očekávaného výnosu určováno pouze váženým průměrem směrodatných odchylek jednotlivých instrumentů, ale zahrnuje také vzájemné vztahy jejich výnosů. Za předpokladu, že portfolio obsahuje pouze dva instrumenty, je směrodatná odchylka vyjadřující riziko portfolia určena následujícím vztahem:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i \sigma_{ij} x_j}, \text{ pro } \{i,j\} = 1, 2, \dots, n \quad (2.3.4)$$

kde σ_p je směrodatná odchylka portfolia, x_i je váha i-tého instrumentu v portfoliu, x_j je váha j-tého instrumentu v portfoliu, σ_{ij} (cov_{ij}) je kovariance i-tého a j-tého instrumentu. Korelační koeficient, který měří vztah mezi dvěma instrumenty a je dán vztahem:

$$\rho_{ij} = \frac{cov_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (2.3.5)$$

kde cov_{ij} je kovariance, která v absolutní hodnotě vyjadřuje směr vzájemného pohybu instrumentů. Kovariance je dána vztahem:

$$cov_{ij} = \sum p_i \cdot [R_i - E(R_i)] \cdot [R_j - E(R_j)], \quad (2.3.6)$$

kde p_i je pravděpodobnost výskytu jednotlivých výnosových měr.

Proto, aby byl investor schopen vypočítat směrodatnou odchylku portfolia, je ještě potřeba uvést jeden vzorec týkající se výpočtu směrodatné odchylky jednotlivých instrumentů v portfoliu například na roční bázi,

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{denní}^2 \cdot K}, \quad (2.3.7)$$

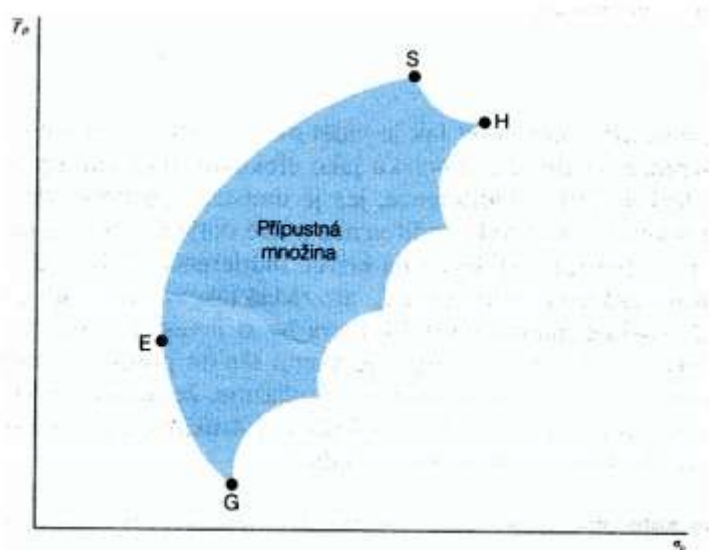
kde K je počet obchodních dní a $\sigma_{denní}^2$ je výběrový rozptyl z denních výnosů, který je vypočten na základě vztahu:

$$\sigma_{denní}^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_i^N [R_i - E(R_i)]^2, \quad (2.3.8)$$

2.3.6. Efektivní množina

Efektivní množina, jak uvádí Sharpe (1990), zobrazuje maximální očekávanou výnosnost při různých úrovních rizika a minimální riziko při různých úrovních očekávané výnosnosti. Tato množina má konkávní, neboli deštňíkový tvar a je podmnožinou přípustné množiny. Přípustná množina zahrnuje všechna portfolia, která lze vytvořit z N cenných papírů. Tato portfolia leží buď na, nebo uvnitř hranice přípustné množiny.

Obr. 2.1 Přípustná a efektivní množina



Zdroj: Sharpe, W.F., G.J. Alexander, *Investice*, s. 129

V obr. 2.1 je znázorněna přípustná množina portfolií, přičemž body E , G , H a S jsou příkladem takovýchto portfolií. Efektivní množinu lze nalézt v případě použití věty o efektivní množině. Z obr. 2.1 je zřejmé, že bod E zobrazuje nejnížší možné riziko, což může být ověřeno zakreslením svislé čáry procházející tímto bodem. Vlevo od této přímky nebude ležet žádný bod přípustné množiny. Bod H naopak zobrazuje nejvyšší možné riziko, což může být rovněž ověřeno zakreslením svislé čáry procházející tímto bodem. Vpravo od této čáry nebude ležet žádný bod přípustné množiny. Maximální výnosnost při různých úrovních rizika v tomto případě zobrazuje množina portfolií, ležící na horní hranici přípustné množiny mezi body E a H .

Při aplikaci druhé podmínky je postup obdobný. Žádný bod přípustné množiny nenabízí vyšší výnosnost, než bod S a nižší výnosnost, než bod G .

Pro nalezení efektivní množiny je nutné aplikovat obě podmínky. Efektivní množina tedy bude ležet na horní hranici přípustné množiny mezi body E a S .

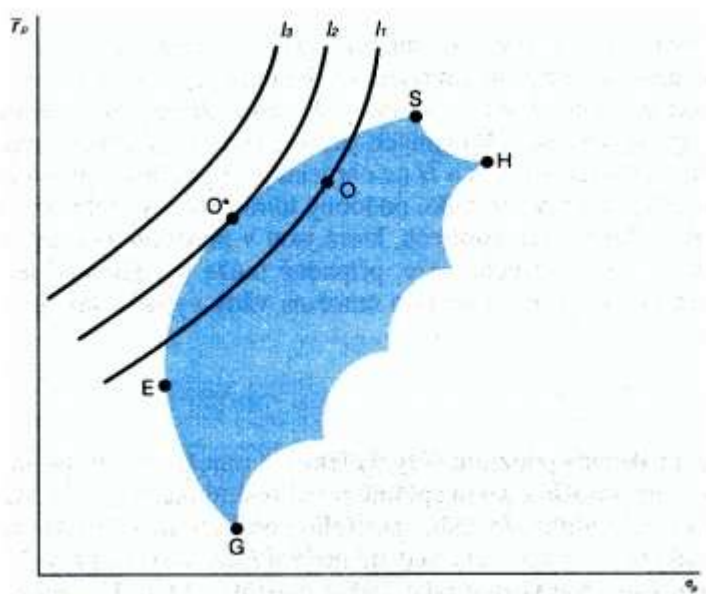
2.3.7. Optimální portfolio

Výběr optimálního portfolio je závislý na investorově averzi k riziku. Míra této averze je zachycována indifferenčními křivkami a může mít několik stupňů. Musílek (2002) uvádí následující:

- investor s umírněnou averzí k riziku,
- investor s vysokou averzí k riziku,
- investor s nízkou averzí k riziku,
- neutrální investor vůči riziku,
- investor vyhledávající riziko.

Při výběru optimálního portfolio by měl investor zakreslit do obrázku s přípustnou a efektivní množinou své indifferenční křivky a vybrat takové portfolio, které je tangentou hranice efektivních portfolio. Optimální portfolio znázorňuje obr. 2.2

Obr. 2.1 Optimální portfolio



Zdroj: Sharpe, W.F., G.J. Alexander, *Investice*, s. 130

Z obr. 2.2 je patrné, že jedinou tangentou přípustného portfolio je indifferenční křivka I_2 , která se přípustného portfolio dotýká v bodě O^* . Tento bod znázorňuje optimální portfolio investora.

Všechna východiska tvorby optimálních portfolio uvedená v podkapitole 2.2 vycházejí z Markowitzova přístupu umožňujícího investování pouze do rizikových aktiv. V následující kapitole bude uveden jeden z alternativních přístupů ke tvorbě portfolio.

2.3.8. Alternativní přístup optimalizace portfolia – umožnění bezrizikového investování a vypůjčování

Jak již bylo zmíněno v předchozí podkapitole, Markowitzův přístup dovoluje investování pouze do rizikových aktiv. V této podkapitole bude popsána další možnost investování za předpokladu umožnění bezrizikového investování a vypůjčování (tzv. Tobinův model). Zároveň bude popsán vliv předpokladů tohoto modelu na tvar efektivní množiny portfolií.

Bezrizikové aktivum je, jak uvádí Sharpe (1990), v kontextu Markowitzova přístupu takové aktivum, u kterého je v době jeho koupě jistá hodnota na konci doby držení. Vzhledem k této skutečnosti je směrodatná odchylka tohoto aktiva nulová. Nulová směrodatná odchylka dále znamená, že kovariance mezi výnosnostmi bezrizikového a libovolného rizikového aktiva je rovna nule. Tuto skutečnost lze ověřit vztahem

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j, \quad (2.3.9)$$

kde ρ_{ij} je korelační koeficient aktiva i a j , σ_i je směrodatná odchylka i -tého aktiva a σ_j je směrodatná odchylka j -tého aktiva. V případě, že je i -tým aktivem bezrizikové aktivum a jeho směrodatná odchylka se tedy rovná nule, je i celá rovnice rovna nule.

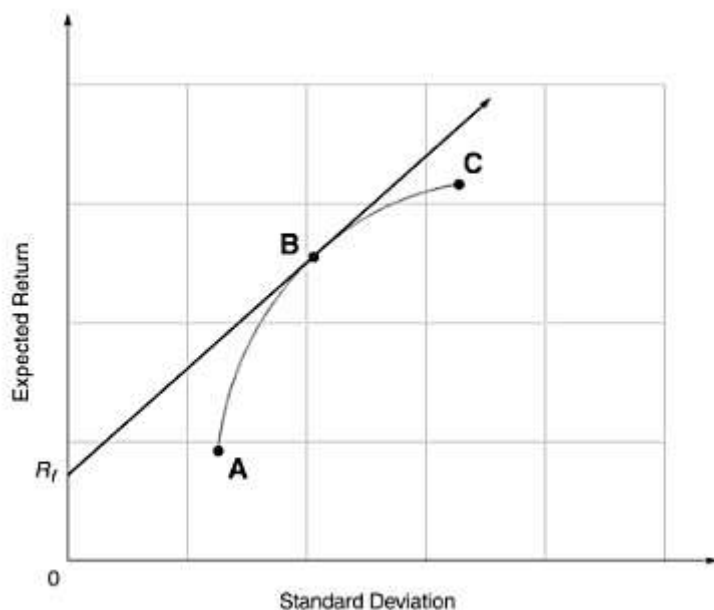
Jelikož má bezrizikové aktivum jistou výnosnost, musí být toto aktivum instrumentem s pevným příjmem, bez možnosti nesplacení. V tomto případě je nutné zcela vyloučit veškeré cenné papíry emitované soukromými společnostmi. Za bezrizikové aktivum lze proto považovat pouze instrument emitovaný veřejným sektorem, například vládou. V českých podmínkách jsou za bezriziková aktiva považovány například státní dluhopisy. Je to zejména z toho důvodu, že pravděpodobnost neuskutečnění plnění ze státního dluhopisu je i vzhledem k vysokému ratingu České republiky velmi nízká. Státní dluhopisy jsou navíc emitovány s fixní úrokovou sazbou a je tedy známá částka, splatná v době zralosti.

V případě umožnění bezrizikového investování a vypůjčování může investor jednak investovat do bezrizikového aktiva a rovněž si může za bezrizikovou sazbu vypůjčit peněžní prostředky a ty investovat do rizikových aktiv. Investor tedy není omezen výší svého bohatství.

Vliv předpokladů Tobinova modelu na tvar efektivní množiny portfolií

Možnost zahrnutí bezrizikového aktiva do portfolia výrazným způsobem mění nejen přípustnou množinu portfolií, ale rovněž její efektivní hranici, což je patrné z obr. 2.3

Obr. 2.3 Efektivní množina Tobinova modelu



Zdroj: Strong, R. *Portfolio Construction, Management and Protection*, s. 159

V obr. 2.3 je uvedena přípustná a efektivní množina vytvořená na základě Markowitzova modelu. Zahrnutím možnosti bezrizikového investování a vypůjčování je do grafu doplněna výnosová míra R_f se směrodatnou odchylkou rovnou nule. Investor může kombinovat bezrizikové aktivum s množinou efektivních portfolií dle Markowitzova modelu. Je poté schopen dosáhnout jakékoliv kombinace výnosu a rizika, ležící na přímce spojující body R_f a B . Tato portfolia se nazývají zápůjční.

Bod B znázorňuje tzv. tržní portfolio, které se vyznačuje tím, že zahrnuje investice pouze do rizikových aktiv, a podíly obsažené v tomto portfoliu, jsou rovny tržní kapitalizaci jednotlivých aktiv. Zároveň si v tomto bodě investor nevypůjčuje ani nezapůjčuje za bezrizikovou sazbu. Bod B je jediným bodem, ve kterém se portfolia vytvořená na bázi Markowitzova a Tobinova modelu rovnají.

Za předpokladu umožnění bezrizikového vypůjčování, si může investor vypůjčovat za bezrizikovou sazbu. Prostředky takto získané může dále investovat do rizikových aktiv a vytvořit tak jakoukoliv kombinaci výnosu a rizika, ležící na přímce s počátkem v bodě B , a pokračující směrem nahoru vlevo. Tato portfolia se nazývají výpůjční.

Přímka, na které leží body R_f a B je též nazývána jako přímka kapitálového trhu (capital market line). Přímka kapitálového trhu vyjadřuje rovnováhu mezi výnosem a rizikem a je efektivní množinou modelu CAPM (capital assets pricing model), využívaného k oceňování kapitálových aktiv.

3. Popis metod dynamického programování

V celé řadě oborů se můžeme setkat s problémy, které vedou k maximalizaci, či minimalizaci funkcí za daných omezujících podmínek. Řešením těchto problémů jsou takzvané optimalizační úlohy, které mohou řešit problémy jedno-etapové a více-etapové. Více-etapové rozhodovací procesy založené na použití rekurentních funkcionálních vztahů a opírající se o tzv. Bellmanův princip optimality jsou nazývány dynamické programování.

Dynamické programování může být použito k řešení řady nelineárních optimalizačních úloh deterministických i stochastických. V ekonomii je dynamické programování využíváno například při plánování výroby, řízení zásob, plánování obnovy zařízení či rozdělování zdrojů. Metody dynamického programování jsou též využívány v oblasti financí a to zejména v úlohách oceňování opcí a optimalizace portfolií.

3.1. Popis a matematická formulace dynamického programování

Pokud nebude uvedeno jinak, bude tato podkapitola vycházet z publikací Klapka (1970) a Pflug (2007).

3.1.1. Základní pojmy z teorie procesů

V podkapitole 3.1.1. budou popsány dynamické procesy a funkce sdružené s těmito procesy. Dále bude provedena klasifikace procesů dle stacionarity, vlastností časové množiny a charakteru veličin, které v procesech vystupují.

Dynamické procesy

Předpokládejme, že ekonomický (matematický, fyzikální) problém je popsán v okamžiku t stavovým vektorem

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)], \quad (3.1.1)$$

kde každá složka určuje některou vlastnost systému. Číslo M je nazýváno dimenzí systému, přičemž může nabývat konečných nebo nekonečných hodnot. Stav systému není určen ekonomickou (fyzikální) vlastností daného systému, ale naopak závisí na prvcích zavedených do matematické formulace.

Nyní bude nahrazen symbol $x(t)$ symbolem p za předpokladu, že p je prvkem množiny přípustných stavů systému R . Dále bude zavedena funkce $T(p)$, která je nazývána transformací a která je specifická tím, že transformovaný vektor $p_1 = T(p)$ patří do množiny R . Potom p představuje počáteční stav, p_1 stav o jednu časovou jednotku pozdější a podobně. Posloupnost vektorů může být zapsána následovně:

$$\{p, p_1, p_2, \dots, p_n\}, \quad (3.1.2)$$

kde $p = p_0$, $p_{n+1} = T(p_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, představuje stavy systémů pozorované v diskrétních časových okamžicích n . Tento proces je označován jako n -etapový proces

Posloupnost vektorů je nazývána dynamickým procesem určeným počátečním stavem p a transformací T . V uvedeném případě se jedná o stacionární dynamický proces diskrétního deterministického typu.

Funkce sdružená s procesem

Cílem dynamického programování je nalezení takové rozhodovací strategie, která optimalizuje kriteriální funkci sdruženou s daným procesem, za předpokladu splnění daných omezujících podmínek. Příkladem takových funkcí může být

$$f_N(p) = \sum_{i=0}^N h(p_i), \text{ nebo} \quad (3.1.3)$$

$$f_N(p) = \max h(p_i), \quad (3.1.4)$$

kde $h(x)$ je daná skalární funkce vektoru. Pokud je daná transformace T , je funkční hodnota $f_n(p)$ pro každou z uvedených funkcí určena počátečním stavem p a počtem etap n .

Rekurentní vztah lze odvodit například ze vztahu (3.1.3). Tvar rekurentního vztahu je následující:

$$f_N(p) = h(p_i) + f_{N-1}[T(p)]. \quad (3.1.5)$$

Procesy konečné a nekonečné

Doposud zmiňovaný n -etapový proces je procesem konečným. Proces je zastaven v okamžiku, kdy je jeho stav popsán veličinou p_n .

V případě zkoumání nekonečného procesu, jsou funkce sdružené s tímto procesem značně zjednodušeny, jelikož není uvažováno se závislostí na n . Nekonečný proces může sloužit jako aproximace složitějšího procesu konečného.

Nestacionární procesy

Dosud uvažovaný proces, ve kterém platilo $p_{n+1} = T(p_n)$, se nazývá stacionární. V případě stacionárního procesu nezávisí tvar transformace na etapě procesu. Obecnější situace, kdy platí $p_{n+1} = T_n(p_n)$, se nazývá proces nestacionární. Pro dosažení výsledku je nutné brát v úvahu časový okamžik, ve kterém proces začíná. Obecně lze proces zapsat následovně:

$$\{p_m, p_{m+1}, \dots, p_n\}, \text{ kde } p_{m+1} = T_m(p_m), p_{m+2} = T_{m+1}(p_{m+1}). \quad (3.1.6)$$

Spojité procesy

Procesy mohou být diskrétní a spojité. Diskrétní procesy jsou takové, ve kterých lze systém pozorovat pouze v diskrétních (denních, měsíčních, ročních) intervalech. Spojité procesy jsou naopak takové procesy, ve kterých se transformaci systému pozorovat spojitě v čase. Interval mezi jednotlivými pozorováními jsou v tomto procesu nekonečně malé.

Stochastické procesy

Další klasifikace procesů rozděluje tyto procesy na deterministické a stochastické. V případě deterministických procesů převádí transformace T stavový vektor p na stavový vektor p_1 , kde p_1 je jednoznačně určeno pomocí p . Často bohužel nelze s jistotou určit transformaci T a proto je nutné nahradit deterministické procesy stochastickými zavedením teorie pravděpodobnosti.

Za předpokladu, že transformace T je stochastickou transformací určující náhodný vektor p_1 , je zřejmé, že funkce sdružená s tímto procesem bude rovněž náhodnou proměnnou. V tomto případě je nutné zavedení tzv. očekávané hodnoty funkce. Chceme-li stanovit očekávanou hodnotu výrazu (3.1.5), dostaneme po úpravách vztah následující:

$$f_N(p) = h(p_i) + E\{f_{N-1}[T(p, r)]\}, \quad (3.1.7)$$

kde r je diskrétní náhodná proměnná. Rekurentní vztah má následně tvar

$$f_N(p) = h(p_i) + \sum_r P_j \cdot f_{N-1}[T(p, r)], \quad (3.1.8)$$

kde P_j je pravděpodobnost.

3.1.2. Podstata a účel dynamického programování

Dynamické rozhodovací procesy jsou v dnešní době jednoduše aplikovatelní zejména v oblastech operativního řízení. Bude-li ke každé etapě diskrétního deterministického typu (3.1.2) přiřazen vektor q_i náležící množině přípustných vektorů $S(p_i)$, bude platit

$$p_{n+1} = T(p_n, q_n), \quad (3.1.9)$$

kde $q = q_0, q_n \in S(p_n)$. Vektor q_i se nazývá rozhodovací vektor a volba q_i je tedy rozhodnutím.

Dynamické procesy jsou takové, v nichž jsou veličiny q_i vybírány tak, aby maximalizovaly předepsanou skalární funkci stavových a rozhodovacích proměnných. Tyto funkce jsou též nazývány jako funkce účelové.

Strategie

Strategií procesu je nazývána posloupnost funkcí přítomného a minulých stavů. Strategie maximalizující funkci F se nazývá optimální strategie. Základním smyslem provádění dynamického programování je nalezení optimální strategie neboli optimalizace rozhodovacího procesu. Příkladem účelových funkcí mohou být následující.

$$f_N(p) = \sum_{i=0}^N h(p_i, q_i), \quad (3.1.10)$$

$$f_N(p) = \max h(p_i, q_i), \quad (3.1.11)$$

kde $h(x,y)$ jsou dané skalární funkce vektorů.

Princip optimality – deterministický a stochastický proces

Na základě Bellmanova principu lze nalézt základní funkcionální rovnici dynamického programování N -etapového diskrétního deterministického procesu následovně:

Je-li $[q, q_1, \dots, q_n]$ optimální strategií N -etapového procesu s počátečním stavem p , kde funkce q_i jsou ve tvaru $q_i = q_i(p_i)$, pak posloupnost $[q, q_1, \dots, q_n]$ tvoří optimální strategii $(N-1)$ -etapového procesu, jehož počáteční stav je $p_1 = T(p, q)$.

Rekurentní vztah dle Bellmanova principu je formulován následovně:

$$f_N(p) = \max_q \{h(p, q) + f_{N-1}[T(p, q)]\}. \quad (3.1.12)$$

Nyní bude uveden případ tvorby diskrétního stochastického procesu. Předpokladem tohoto procesu je, že za počátečního stavu systému popsaného vektorem p bylo přijato rozhodnutí q . Na rozdíl od deterministického procesu není tímto rozhodnutím určen jednoznačný nový stav. Nový stav totiž závisí také na hodnotě, které nabude náhodná proměnná, která vyjadřuje vliv náhodných faktorů. Nový stav p_1 vzniklý následkem rozhodnutí q za předpokladu realizace náhodné složky r tedy bude mít tvar

$$p_1 = T(p, q, r). \quad (3.1.13)$$

Po provedení rozhodnutí q_1 analogicky dospějeme ke stavu $p_2 = T(p_1, q_1, r_1)$. Pokud nyní bude vycházeno ze vztahů (3.1.8) a (3.1.12) lze dospět k rekurentnímu vztahu diskrétního stochastického procesu

$$f_N(p) = \max_q \{ \sum_r P_j [h(p, q, r) + f_{N-1}[T(p, q, r)]] \}. \quad (3.1.14)$$

3.2. Příklady využití dynamického programování

V podkapitole 3.2 budou uvedeny příklady využití dynamického programování v oblasti finančního rozhodování. Nejprve budou popsány binomické modely oceňování derivátů a následně bude nastíněna problematika více-etapové optimalizace portfolia. Tato podkapitola bude vycházet zejména z publikací Zmeškal (2004), Ambrož (2002) a Pflug (2007).

3.2.1. Binomický model oceňování derivátů na akcie

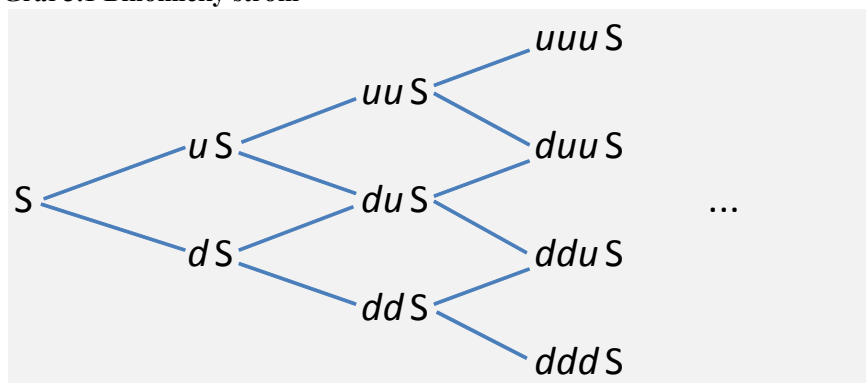
Binomický model je jedním z důležitých nástrojů pro oceňování derivátů na akcie, indexy a měny. Tento model je založen na následujících předpokladech:

- nejsou uvažovány žádné transakční náklady,
- nejsou uvažovány daně a poplatky z obchodování,
- trh je efektivní, okamžitě znemožňuje arbitráž,
- existuje jediná úroková míra pro zapůjčování i vypůjčování kapitálu,
- neexistuje žádné omezení (např. na krátké pozice),
- nejsou uvažována žádná časová zpoždění,
- na podkladové aktivum nejsou vypláceny dividendy,
- je možné obchodovat s jakoukoliv částí akcie.

Binomický model značným způsobem zjednodušuje realitu, nicméně i s těmito zjednodušeními podává velmi věrné výsledky, podobné velice sofistikovanému Black-Scholesově modelu.

V případě aplikace binomického modelu tedy budeme předpokládat diskrétní proces, kdy se cena podkladového aktiva mění v přesně daných a vždy stejných intervalech (např. den, měsíc nebo rok). Změna ceny podkladového aktiva je rovněž velmi zjednodušená. V každém intervalu se cena podkladového aktiva změní s pravděpodobností p o u procent, nebo s pravděpodobností $1-p$ o d procent. Je-li výchozí cena podkladového aktiva S , lze změny cen v daných intervalech zapsat pomocí tzv. binomického schématu (binomického stromu).

Graf 3.1 Binomický strom



Zdroj: Ambrož, L., *Oceňování opcí*

Ke stanovení ceny opcí rozlišujeme dva přístupy:

- replikační strategie,
- hedgingová strategie.

Replikační strategie

V případě replikační strategie je vytvořeno portfolio z podkladového aktiva S a bezrizikového aktiva B . Toto portfolio je vytvořeno takovým způsobem, aby se za všech okolností rovnala hodnota portfolia hodnotě derivátu, neboli aby byla hodnota derivátu replikována. Hodnota portfolia ve výchozím čase t je následující:

$$a \cdot S_t + B_t = C_t. \quad (3.2.1)$$

Při růstu ceny je hodnota portfolia v čase $t+dt$

$$a \cdot S_{t+dt}^u + B_t(1+r)^{dt} = C_{t+dt}^u, \quad (3.2.2)$$

při poklesu ceny je hodnota portfolia v čase $t+dt$

$$a \cdot S_{t+dt}^d + B_t(1+r)^{dt} = C_{t+dt}^d, \quad (3.2.3)$$

kde a je množství podkladového aktiva, S je cena podkladového aktiva, B je hodnota bezrizikového aktiva, C je hodnota derivátu, r je bezriziková sazba, u je index růstu a d je index poklesu ceny podkladového aktiva.

Cena opce se v době splatnosti rovná vnitřní hodnotě opce. Pro call opci tedy platí

$$C_{t+dt}^u = VH_{t+dt}^u = \max(S_{t+dt}^u - X; 0), \text{ nebo} \quad (3.2.4)$$

$$C_{t+dt}^d = VH_{t+dt}^d = \max(S_{t+dt}^d - X; 0), \quad (3.2.5)$$

kde X je realizační cena a VH je vnitřní hodnota opce.

Řešením rovnic (3.2.1), (3.2.2) a (3.2.3) získáme rekurentní rovnici pro výpočet ceny opce

$$C_t = (1+r)^{-dt} \cdot [C_{t+dt}^u \cdot p + C_{t+dt}^d \cdot (1-p)], \quad (3.2.6)$$

kde p je rizikově neutrální pravděpodobnost, C_t je cena opce v čase t .

Hedgingová strategie

V případě hedgingové strategie je potřeba z podkladového aktiva a opce vytvořit takové portfolio π , aby jeho výnos byl bezrizikový.

Hodnota portfolia v čase t je následující.

$$\pi_t = h \cdot S_t - C_t. \quad (3.2.7)$$

Při růstu ceny je hodnota portfolia v čase $t+dt$

$$\pi_{t+dt}^u = h \cdot S_{t+dt}^u - C_{t+dt}^u, \quad (3.2.8)$$

při poklesu ceny je hodnota portfolia v čase $t+dt$

$$\pi_{t+dt}^d = h \cdot S_{t+dt}^d - C_{t+dt}^d, \quad (3.2.9)$$

kde h je množství podkladových aktiv (zajišťovací poměr).

Zajištění proti pohybu náhodné změny podkladového aktiva znamená, že hodnota portfolia bude na konci období stejná nezávisle na pohybu ceny podkladového aktiva, což může být zapsáno následovně:

$$h \cdot S_{t+dt}^u - C_{t+dt}^u = h \cdot S_{t+dt}^d - C_{t+dt}^d = (h \cdot S_t - C_t) \cdot (1 + r)^{dt}. \quad (3.2.10)$$

Ze vztahu (3.2.10) lze stanovit cenu opce C_t následovně:

$$C_t = h \cdot S_t - (h \cdot S_{t+dt}^u - C_{t+dt}^u) \cdot (1 + r)^{dt}. \quad (3.2.11)$$

Matematická formulace modelu

Cena opce za použití replikační strategie, je stanovena pomocí dynamického programování v jednotlivých krocích (R1,...R7).

Odhad vstupních parametrů,

$$p = \frac{e^{r+dt} - d}{u - d}, \quad (R1)$$

$$\text{kde } u = e^{\sigma\sqrt{dt}} \text{ a } d = e^{-\sigma\sqrt{dt}} \quad (R2)$$

Cena podkladového aktiva,

$$S_{t,n} = S \cdot u^n. \quad (R3)$$

Vnitřní hodnota call a put opce,

$$VH_{t,n} = \max(S_{t,n} - X; 0) \text{ pro call opci,} \quad (R4)$$

$$VH_{t,n} = \max(X - S_{t,n}; 0) \text{ pro put opci.} \quad (R5)$$

Cena evropské a americké opce,

$$F_{t,n} = (p \cdot F_{t+1,n+1}^u + (1 - p) \cdot F_{t+1,n+1}^d) \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right) \text{ pro evropskou opci,} \quad (R6)$$

$$F_{t,n} = \max\left[(p \cdot F_{t+1,n+1}^u + (1 - p) \cdot F_{t+1,n+1}^d) \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right); VH_{t,n}\right] \text{ pro americkou opci.} \quad (R7)$$

kde $F_{t,n}$ je cena opce v čase t a stavu n , p je pravděpodobnost růstu a $F_{t,n}^u$ je cena opce při růstu u v čase $t + 1$ a stavu $n + 1$.

3.2.2. Binomický model oceňování derivátů na úrokové sazby

Deriváty na úrokové sazby jsou finanční instrumenty, jejichž výplaty závisí na úrokových sazbách. Jejich výplatní funkce tedy není, jako v případě derivátů na akcie, závislá na ceně jednoho podkladového aktiva, ale závisí na celé výnosové křivce. Mezi deriváty na úrokové sazby mohou být zařazeny obligace, futures na obligace, opce na obligace, včleněné opce, hypoteční zástavní listy a swapy.

Ceny derivátů na úrokové sazby lze stanovit analyticky, pomocí simulací náhodného vývoje nebo pomocí binomických a trinomických aproximací. V případě binomického modelu je postupováno následovně.

V prvním kroku je pomocí binomického schématu vyjádřen vývoj náhodných krátkodobých úrokových sazeb (forwardů na jedno období). Poté jsou propočteny ceny obligací pro různé doby splatnosti za předpokladu nemožnosti arbitráže. Cena obligace je v každém uzlu vypočtena pomocí formule

$$P_{t,s} = (1 + r_{t,s})^{-1} \cdot 0,5 \cdot [P_{t+1,s+1}(n) + P_{t+1,s-1}(n)], \quad (3.2.12)$$

kde $P_{t,s}$ jsou ceny v čase t a stavu s , n je počet let do splatnosti obligace, $r_{t,s}$ je krátkodobá sazba. Pro splnění podmínky nemožnosti arbitráže musí být splněno, že

$$P_{t+1,s+1} \geq 0 \wedge P_{t+1,s-1} \geq 0. \quad (3.2.13)$$

Dalším krokem tohoto procesu je kalibrace, při které je binomický svaz náhodného vývoje úrokových sazeb kalibrován tak, aby rozdíl tržních cen obligací a výchozích cen byl minimální. V poslední části je propočten vývoj podkladového aktiva v jednotlivých uzlech, poté je určena vnitřní hodnota a rekurentním způsobem stanovena cena.

Matematická formulace modelu

Podkladovým aktivem může být například cena obligace, jejíž náhodnou složku, vývoj krátkodobých úrokových sazeb, určíme pomocí Ho-Leevova modelu. Cena opce poté bude vypočítána pomocí dynamického programování v jednotlivých krocích (R1,...,R5).

Diskrétní Ho-Leevův model – stanovení krátkodobé úrokové sazby

$$r_{t,s} = a_t + b_t \cdot s, \quad (R1)$$

kde s je stav, a_t je průměrná sazba a b_t je volatilita.

Cena elementární obligace,

$$P_{t,s} = (1 + r_{t,s})^{-1} \cdot [P_{t+1,s+1}(n) \cdot p + P_{t+1,s-1}(n) \cdot (1 - p)]. \quad (\text{R2})$$

Implicitní podmíněna forwardová sazba,

$$f_{t-1,t} = \frac{P_0 \cdot (t-1)}{P_0 \cdot (t)} - 1. \quad (\text{R3})$$

Cena kupónové obligace,

$$B_{t,s} = C \cdot \sum_{n=1}^n P_{t,s}(n) + (NH + C) \cdot P_{t,s}(n). \quad (\text{R4})$$

Vnitřní hodnota put opce,

$$VH_{t,s} = \max(X - B_{t,s}; 0). \quad (\text{R5})$$

Výpočet ceny evropské a americké opce je stejný, jako v předchozím modelu.

3.2.3. Vícefázový portfolio model

Vícefázový portfolio model se dle zabývá aktivním řízením portfolia s cílem generovat zisk a zároveň kontrolovat negativní vývoj expozice. Portfolio model je stochastický, diskrétní model s definovaným horizontem, ve kterém se investor musí rozhodnout o složení svého portfolia s výhledem na nejistotu budoucích cen (výnosů) z rizikových aktiv v portfoliu. Tato podkapitola vychází z Fulga (2009).

Portfolio model má následující předpoklady:

- není dovolen krátký prodej,
- neexistuje možnost vypůjčování,
- nejsou povoleny žádné externí intervence,
- bezrizikový výnos je konstantní v čase,
- aktivní zásahy jsou povoleny pouze v předem určených časových intervalech,

V počátečním období $t = 0$ je určité množství bohatství investora k dispozici v aktivech $x_{1,0}, \dots, x_{n,0}$ a v množství peněžních prostředků $x_{n+1,0}$. Počáteční investice bude označena $x_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0}, x_{n+1,0})$. Na problém optimalizace portfolia může být nahlíženo jako na vícefázový rozhodovací problém, ve kterém jsou prováděny zásahy v diskrétních intervalech $t \in \{0, 1, 2, \dots, (T-1)\}$, kde T je poslední fáze definovaného horizontu. Aktivní zásah do aktiva i

v čase t je označován jako $u_{i,t}$ a představuje částku i -tého aktiva nakoupeného nebo prodaného v čase t .

S nákupem a prodejem aktiv jsou spojeny transakční náklady. V případě těchto nákladů budeme předpokládat, že jsou přímo úměrné množství obchodovaných aktiv. Transakční náklady spojené s nákupem jednoho aktiva c^p a transakční náklady spojené s prodejem aktiva c^s budou vyjádřené v procentech.

Nakupováním a prodáváním aktiv, může investor měnit strukturu portfolia vždy v čase t . Vektor bohatství v čase t bude označen symbolem $W_{i,t}$, cena aktiva $p_{i,t}$ a bezrizikový výnos r .

Vektor W_t je vektor bohatství zachycující stav před učiněním rozhodnutí, W_t^u je vektor bohatství zachycující stav po učinění rozhodnutí, tedy včetně aktivních zásahů $u_{i,t}$. Jednotlivé složky vektoru bohatství zachycujícího stav po provedení zásahu jsou následující.

$$W_{i,t}^u = p_{i,t} \cdot (x_{i,t} + u_{i,t}), \text{ kde pro } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2.14)$$

Jednotlivé složky vektoru bohatství zachycujícího stav před provedením zásahu jsou následující.

$$W_{i,t+1} = p_{i,t+1} \cdot (x_{i,t} + u_{i,t}), \text{ kde pro } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2.15)$$

Hodnota celkového bohatství zachycujícího stav po provedení rozhodnutí je dána

$$W_t^u = \sum_{i=1}^{n+1} W_{i,t}^u, \quad (3.2.16)$$

hodnota celkového bohatství před provedením rozhodnutí je dána

$$W_t = \sum_{i=1}^{n+1} W_{i,t}. \quad (3.2.17)$$

Jedním z předpokladů tohoto modelu je nemožnost externích intervencí. Bohatství investora proto musí být v okamžiku aktivního zásahu stejné, jako před tímto zásahem. Platí proto vztah $W_t = W_t^u$.

Symbolem S je označen set scénářů budoucích cen. Pravděpodobnost scénáře $s \in S$ je $\pi_s > 0$, přičemž $\sum \pi_s = 1$. V matematické formulaci modelu budou všechny proměnné, jejichž hodnota závisí na realizaci scénáře s , indexovány tímto symbolem.

Matematická formulace modelu

V první fázi realizace modelu je zavedena účelová funkce (UF1) a omezující podmínky (P1,...,P5).

$\sum_{t=1}^T U(W_{t,s}) \rightarrow \max$	(UF1)
$x_{i,s,t+1} = x_{i,s,t} + u_{i,s,t},$	(P1)
$x_{n+1,s,t+1} = (1 + r) \cdot [x_{n+1,s,t} \cdot \sum_{i=1}^n p_{i,s,t} \cdot u_{i,s,t} \cdot (-(1 + c^p) \cdot u_{i,t} + (1 - c^s) \cdot (-u_{i,t}))],$	(P2)
$x_{s,0} = x_0,$	(P3)
$x_{s,t} \geq 0,$	(P4)
$W_{s,t} = W_{s,t}^u,$	(P5)

Problém první fáze realizace modelu je řešen pomocí algoritmu spojujícího specifické rysy progresivního hedgingového algoritmu a dynamického programování. Tento algoritmus poskytuje optimální řešení označené $u_{s,t}(\delta) = (u_{1,s,t}(\delta), \dots, u_{n,s,t}(\delta))$, kde δ je řídicí proměnná umožňující měnit přínos každého zakoupeného nebo prodaného aktiva. Řešení $u_{s,t}(\delta)$ umožňuje v tomto modelu vypočítat konečné bohatství pro každý scénář s .

Výsledné bohatství je poté označeno zjednodušujícím symbolem W_T a je použito v druhé fázi realizace portfolio modelu, zabývající se kontrolou negativního vývoje expozice, jako jeden ze vstupů. Pro druhou fázi realizace modelu je zavedena účelová funkce (UF2) a podmínka (P6).

$\min_{z,\delta} \left[\sum_{s=1}^S \pi_s \cdot W_{s,T}(\delta); z + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \sum_{s=1}^S \pi_s \cdot y_s(z, \delta) \right],$	(UF2)
$\delta_1 \leq \delta \leq \delta_2.$	(P6)

kde z odpovídá hodnotě Value at Risk (VaR) pro optimální řešení a y reprezentuje hodnotu přesahující VaR ve scénáři s .

Parametrickými změnami δ lze vygenerovat optimální řešení, které zajišťuje portfolio proti celkovému riziku.

3.2.4. Vícefázový $QP(W)$ portfolio model

Vícefázový $QP(W)$ (Quadratic Programming) model prezentovaný londýnskou univerzitou *Imperial collage of science, technology and medicine* je model, který slouží k dynamické optimalizaci akciového portfolia. Tato model vychází z Gülpmar, Rustem A Settergren (2004).

Model je založen na Markowitzově přístupu, který je klasickým příkladem M-V modelu. Umožňuje totiž vytvořit takové portfolio, které maximalizuje očekávanou střední hodnotu výnosu, přičemž minimalizuje riziko tohoto portfolia.

Vícefázový $QP(W)$ model je diskretní stochastický model s předem určeným investičním horizontem. Rozšiřuje Markowitzův přístup o možnost vyvážení portfolia nákupem a prodejem aktiv v diskretních okamžicích $t \in \{1; T-1\}$ a o možnost prodeje celého portfolia v čase T . To vše za účelem maximalizace zisku a minimalizace rizika v celém investičním horizontu. S možností vyvážení portfolia přirozeně souvisí také transakční náklady, které jsou v tomto modelu zohledněny.

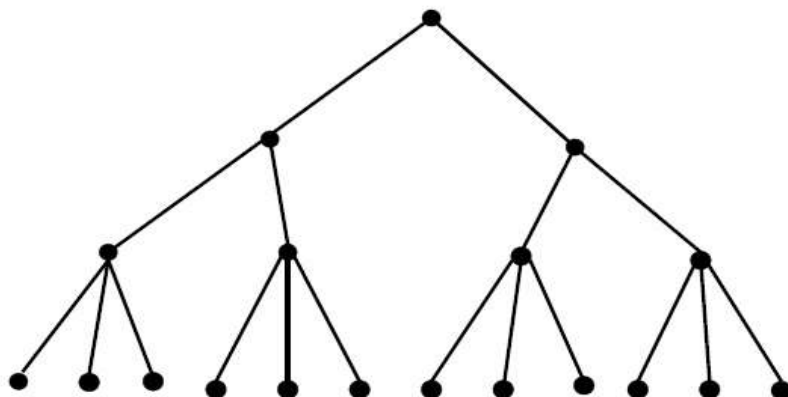
Strom scénářů

Strom scénářů znázorňuje stochastický proces vícefázového modelu. Scénář je definován jako možnost realizace stochastické proměnné $\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_t\}$, proto sada scénářů odpovídá souboru listů stromu (N_t) a uzly stromu odpovídají možné realizaci proměnné ρ . Uzel stromu je označen symbolem $e = (s, t)$, kde s je scénář (cesta od kmene k listu) a časová perioda t specifikuje konkrétní uzel na této cestě. Počáteční uzel lze označit jako $e = 0 = (s, 0)$, kde s může být jakýkoliv scénář, jelikož kmen stromu je pro všechny následující scénáře společný. Uzel předcházející uzlu e je označován jako $a(e) = (s, t - 1)$. Cesta do scénáře e je vyjádřena s pravděpodobností p_e , přičemž suma pravděpodobností v každé vrstvě stromu musí být rovna jedné.

Každý uzel stromu odpovídá rozhodnutí (w_t, b_t, s_t) , kde w_t znázorňuje vektor aktiv v portfoliu, b_t vektor nákupních transakcí a s_t vektor prodejních transakcí. Tyto vektory musí být určeny v čase t a závisí zejména na stochastické proměnné ρ , počátečním bohatství w_0 a předchozích rozhodnutích (w_j, b_j, s_j) , pro $j = 1, \dots, t - 1$. Závislost na procesech následujících je v tomto modelu vyloučena.

Nejistota budoucích procesů je vyjádřena pomocí stromu scénářů, který může být použit v mnoha alternativách. Příkladem těchto tvarů je binomický model zobrazený v grafu 3.1 nebo složitější model zobrazující obr. 3.1

Obr. 3.1 Strom scénářů



Zdroj: Gulpnar, N., B. Rustem, R. Settergren (2004)

Alokace kapitálu

Vzhledem k tomu, že je vysvětlovaný model dynamickým modelem, je zřejmé, že investované bohatství se v čase mění. V čase $t = 0$ je bohatství investora normalizováno na hodnotu 1, stejně jako v případě statického Markowitzova modelu. Existují přitom dvě varianty držby původního bohatství. V případě, že investor v této chvíli vlastní určité portfolio akcií, potom vektor p reprezentující jeho současnou pozici, nabývá hodnoty 1. Pakliže investor této chvíli drží pouze peníze a nemá žádné nakoupené akcie, je vektor $p = 0$. V tomto případě může být při nákupu akcií hodnota vektoru p v čase $t = 0$ zmenšena tak, že $p \leq 1$. Toto snížení je důsledkem existence transakčních nákladů spojených s nákupem, či prodejem akcií. Rozdělení původního bohatství v hodnotě 1 a čase $t = 0$ je poté reprezentováno podmínkami

$$w_0 = p + (1 - c_b) \cdot b_0 - (1 + c_s) \cdot s_0, \quad (3.2.18)$$

$$\sum b_0 + \sum s_0 = 1 - \sum p, \quad (3.2.19)$$

kde c_b a c_s jsou transakční náklady spojené s nákupem, respektive prodejem akcií. Transakční náklady jsou dle autorů modelu důležitým prvkem, který omezuje volnost ve vyvažování portfolia. V případě, že by transakční náklady nebyly zahrnuty, portfolio by se mohlo v každém uzlu nezávisle měnit. V praxi jsou však transakční náklady relativně vysoké a velké změny portfolia v jednotlivých fázích by mohly způsobit, že reálný výsledek bude výrazně

horší, než výsledek předpokládaný modelem. Vztah (3.3.3) neumožňuje v průběhu investičního horizontu přidávat a ubírat peněžní prostředky. V modelu tedy nejsou povoleny žádné externí intervence.

Transakční omezení

Jak již bylo zmíněno, s nákupem a prodejem akcií souvisí transakční náklady, které je investor povinen platit brokerské společnosti.

Rozhodnutí v čase $t > 0$ je závislé na stochastické proměnné ρ^t , s čímž souvisí podmínky

$$w_t = \sum r_t(\rho^t) \cdot w_{t-1} + \sum (1 - c_b) \cdot b_t - \sum (1 - c_s) \cdot s_t, \text{ pro } t = 1, \dots, T-1, \quad (3.2.20)$$

$$w_T = \sum r_T(\rho^T) \cdot w_{T-1}. \quad (3.2.21)$$

Rovnovážné omezení

Za předpokladu, že v investičním horizontu nejsou dovoleny žádné externí intervence, je portfolio odkázáno na samofinancování (nákupy mohou být financovány pouze předchozími prodeji). Hodnota vektoru w_t je proto tvořena hodnotou v předchozím období, sniženou o transakční náklady. Matematický zápis této podmínky je následující.

$$\sum w_t = \sum r_t \cdot w_{t-1} - \sum c_b \cdot b_t - \sum c_s \cdot s_t. \quad (3.2.22)$$

Dle autorů tohoto modelu je jednodušší a stejně účinnou podmínkou splňující rovnovážné omezení následující.

$$\sum b_t - \sum s_t = 0.$$

Referenční tržní portfolio

Referenční tržní portfolio (benchmark) je měřítkem výkonnosti portfolio a je navrženo tak, aby odráželo převažující tržní podmínky. Benchmark je zmiňován z toho důvodu, že popisovaný model využívá metody optimalizace akciového portfolio ve vztahu k benchmarku. Benchmarkem může být například index Px (index burzy cenných papírů Praha) nebo index Rm (index české burzy cenných papírů).

Benchmark v čase $t = 0$ je označen jako w_0 . V následujících obdobích je vypočten pomocí vztahu

$$w_t(\rho^t) = \sum r_t(\rho^t) \cdot w_{t-1}(\rho^{t-1}), \text{ pro } t = 1, \dots, T, \quad (3.2.23)$$

přičemž není povoleno vyvažování tohoto portfolia.

Střední hodnota výnosu portfolia

Cílem investora je vytvoření takového portfolia, které minimalizuje očekávané riziko a zároveň maximalizuje očekávaný výnos. Očekávaný výnos portfolia v čase $t = 1, \dots, T$, je dán vztahem

$$E(r_p) = \sum E[r_t(\rho^t) \cdot w_{t-1}]. \quad (3.2.24)$$

Rovnice (3.3.7) je použitelná v případě, že chceme určit očekávaný výnos před vyvážením portfolia nákupem akcií b_t a prodejem akcií s_t . Diskretizací ρ_t dostaneme uzly rozhodovacího stromu e a uzly předcházející těmto uzlům $a(e)$.

Očekávaný výnos portfolia ve vztahu k benchmarku je poté dán vztahem

$$E(r_p) = E[\sum w_t - \mathbb{W}_t] \quad (3.2.25)$$

$$= E[\sum r_t(\rho^t) \cdot (w_t - \mathbb{W}_t)]$$

$$= E[P_e(\sum r_e \cdot (w_{a(e)} - \mathbb{W}_{a(e)}))]$$

$$= \sum P_e(\sum r_e \cdot (w_{a(e)} - \mathbb{W}_{a(e)})),$$

Rozptyl portfolia

Riziko portfolia je měřeno rozptylem výnosu portfolia ve vztahu k benchmarku následovně.

$$\sigma_p^2 = E\{[\sum r_t(\rho^t) \cdot (w_t - \mathbb{W}_t)]^2\} - \{E[\sum r_t(\rho^t) \cdot (w_t - \mathbb{W}_t)]\}^2 \quad (3.2.26)$$

$$= E\left[P_e(\sum r_e \cdot (w_{a(e)} - \mathbb{W}_{a(e)}))^2\right] - \{E[P_e(\sum r_e \cdot (w_{a(e)} - \mathbb{W}_{a(e)}))]\}^2$$

$$= \sum P_e \cdot \left[\sum (w_{a(e)} - \mathbb{W}_{a(e)}) \cdot ((cov + r_e \cdot r_e) \cdot (w_{a(e)} - \mathbb{W}_{a(e)}))\right] -$$

$$- [\sum P_e(\sum r_e \cdot (w_{a(e)} - \mathbb{W}_{a(e)}))]^2,$$

kde výraz $(cov + r_e \cdot r_e)$ zahrnuje riziko vyplývající ze dvou typů nejistoty. Symbol cov je kovarianční matice, která znázorňuje riziko vyplývající z rozptylu portfolia a $r_e \cdot r_e$ znázorňuje riziko z budoucího diskrétního stochastického procesu.

Matematická formulace modelu

Pro všechny uzly e je dána kovarianční matice cov_e a předpokládaný výnos aktiv r_e . Účelovou funkcí (UF) je minimalizace rizika za daných podmínek (P1,...,P8).

Dále je zavedena konstanta W určující očekávané bohatství investora. Optimalizační model nalezne nejméně rizikovou investiční strategii, pro danou hodnotu W .

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_e P_e \cdot \left[\sum (w_{a(e)} - \mathbb{W}_{a(e)}) \cdot ((cov_e + r_e \cdot r_e) \cdot (w_{a(e)} - \mathbb{W}_{a(e)})) \right], \quad (UF)$$

$$w_0 = p + (1 - c_b) \cdot b_0 - (1 + c_s) \cdot s_0, \quad (P1)$$

$$\sum b_0 + \sum s_0 = 1 - \sum p, \quad (P2)$$

$$w_e = \sum r_e \cdot w_{a(e)} + \sum (1 - c_b) \cdot b_e - \sum (1 - c_s) \cdot s_e, \quad (P3)$$

$$\sum b_e - \sum s_e = 0, \quad (P4)$$

$$\sum P_e (\sum r_e \cdot (w_{a(e)} - \mathbb{W}_{a(e)})) \geq W, \quad (P5)$$

$$w_e \geq 0, \quad (P6)$$

$$b_e \geq 0, \quad (P7)$$

$$s_e \geq 0. \quad (P8)$$

3.3. Model dynamické optimalizace portfolia – flexibilní strategie

V podkapitole 3.3 bude popsán a formulován model, určený k dynamické optimalizaci akciového portfolia, jehož aplikace bude provedena ve čtvrté kapitole této práce. Model je založen na jednofázovém Markowitzově přístupu, který rozšiřuje o možnost vyvážení portfolia nákupem a prodejem aktiv v diskrétních okamžicích $t \in \{1; T-1\}$ a o možnost prodeje celého portfolia v čase T . Model navazuje na přístupy k dynamické optimalizaci portfolia uvedené v podkapitolách 3.2.3 a 3.2.4, přičemž tyto přístupy v určitých aspektech zjednodušuje, v jiných naopak rozšiřuje.

Základním cílem modelu je maximalizace bohatství a minimalizace rizika investora ve stanoveném investičním horizontu, přičemž v jednotlivých fázích investičního horizontu je portfolio investora měněno tak, aby vždy splňovalo vytyčené cíle. Změny portfolia vyvolávají

transakční náklady, které jsou v modelu zohledněny navázáním těchto nákladů na hodnotu nákupů a prodejů aktiv v jednotlivých fázích. Předpoklady modelu jsou následující:

- není dovolen krátký prodej,
- neexistuje možnost vypůjčování,
- portfolio je složeno pouze z rizikových aktiv,
- nákup a prodej aktiv je možný pouze v diskrétních časových intervalech,
- samofinancování portfolia.

Vstupní data

V případě klasického jednofázového Markowitzova modelu jsou k modelování optimálního portfolia využívána historická data a optimalizace probíhá pouze v jednom okamžiku, v čase $t = 0$. Rozšíření modelu spočívá v odhadu budoucích náhodných veličin a vytvoření scénářů. Modelování je tedy prováděno na základě historických dat a zároveň jsou k optimalizaci použity budoucí náhodné toky, které jsou popsány scénáři. K popisu scénářů slouží strom scénářů, jehož příklad představuje obr. 3.1.

V čase $t = 0$ se investor nachází v bodě e_0 (v kořenu stromu), kde na základě historických dat optimalizuje portfolio. V čase $t = 1$ začíná větvení stromu do bodů e^u_t a e^d_t , kde u je index růstu a d je index poklesu. Každý pohyb směrem vzhůru je označen písmenem u a každý pohyb směrem dolů je označen písmenem d . Každé větvení probíhá s určitou pravděpodobností π . Pravděpodobnost celého scénáře (například spodní větve stromu) je spočtena vynásobením všech pravděpodobností na této větvi. Suma pravděpodobností všech scénářů je rovna jedné.

V diskrétních okamžicích v časech $t = 1, \dots, T-1$ je portfolio měněno tak, aby v každém z uzlů e_t bylo optimální. Změny akcií v portfoliu jsou znázorněny nákupem akcií b_t nebo jejich prodejem s_t . Výsledný vektor rozdělení akcií v portfoliu x_t je tedy v čase t ovlivněn vektorem předchozího uzlu x_{t-1} , nákupem a prodejem akcií v čase t a transakčními náklady souvisejícími se změnami portfolia.

Původní bohatství investora

Bohatství investora v čase $t = 0$ je označeno symbolem W_0 a je vyjádřeno v peněžních jednotkách. V uzlu e_0 se neuvažuje s transakčními náklady a to z toho důvodu, že počáteční uzel je pro všechny scénáře stejný a je také stejný pro strategii „koupit a držet“. Zahrnutí

transakčních nákladů v tomto uzlu by proto nemělo žádný smysl. Původní bohatství je tedy bez zahrnutí transakčních nákladů rozděleno do akcií pomocí klasického Markowitzova modelu. Rozdělení bohatství lze zapsat vztahem

$$w_{i,0} = W_0 \cdot x_{i,0}, \quad (3.3.1)$$

kde $x_{i,0}$ je váha i -tého aktiva v portfoliu a $w_{i,0}$ je množství peněz vložených do tohoto aktiva. Množství aktiv, které má dle Markowitzova modelu investor nakoupit, je dáno vztahem

$$k_i = \frac{w_i}{p_i}, \quad (3.3.2)$$

kde k_i je množství i -tého aktiva vyjádřené v kusech a p_i je jeho aktuální cena.

Vyvažování portfolia

Bohatství investora v čase $t = 1, \dots, T-1$ před aktivním zásahem je označeno W_t^B , kde symbol B naznačuje, že se jedná o stav bohatství před učiněním aktivního zásahu (vyvážení portfolia). Celkové bohatství před učiněním rozhodnutí je dáno vztahem

$$W_t^B = \sum w_{i,t}^B, \quad (3.3.3)$$

$$\text{kde } w_{i,t}^B = k_{i,t-1} \cdot p_{i,t}. \quad (3.3.4)$$

Vyvážení portfolia v uzlu e_t pro $t = 1, \dots, T-1$, znamená nákup nebo prodej aktiv za účelem optimalizace portfolia v tomto uzlu. Váha i -tého aktiva $x_{i,t}$ v čase $t = 1, \dots, T-1$ je vypočtena pomocí rovnice

$$x_{i,t} = x_{i,t-1}^B + b_{i,t} \cdot (1 - c) - s_{i,t} \cdot (1 + c), \quad (3.3.5)$$

$$\text{kde } x_{i,t-1}^B = \frac{w_{i,t-1}^B}{W_{t-1}^B}, \quad (3.3.6)$$

$b_{i,t}$ je podíl nakoupeného i -tého aktiva z celkového bohatství W_t^B , $s_{i,t}$ je podíl prodaného i -tého aktiva z celkového bohatství a c je sazba transakčních nákladů.

Bohatství investora po provedení aktivního zásahu je dáno vztahem

$$W_t = \sum w_{i,t}, \quad (3.3.7)$$

$$\text{kde } w_{i,t} = x_{i,t} \cdot W_t^B. \quad (3.3.8)$$

Tímto vztahem je potvrzeno samofinancování portfolia.

Omezující podmínky modelu

Jedním z předpokladů modelu je nemožnost krátkého prodeje, proto je zavedena podmínka, která znemožňuje krátký prodej

$$\{x_i, b_i, s_i\} \geq 0. \quad (3.3.9)$$

Podmínka samofinancování je dána vztahem

$$\sum b_{i,t} - \sum s_{i,t} = 0. \quad (3.3.10)$$

Tato podmínka omezuje množství nakoupených a prodaných aktiv při aktivním zásahu do portfolia a lze interpretovat jako nemožnost nakoupení aktiv za vyšší hodnotu, než za hodnotu získanou při prodeji aktiv.

Další podmínkou je nemožnost současného nákupu a prodeje i-tého aktiva. Je sice zřejmé, že investor nebude v jednom okamžiku nakupovat i prodávat jedno aktivum a zvyšovat si tím transakční náklady, nicméně při aplikaci modelu je potřeba tuto podmínku zavést. Při změně hodnoty nakoupeného i-tého aktiva ($b_{i,t}$) proto musí platit $s_{i,t} = 0$.

V uzlu e_0 je nutné zavedení podmínky

$$\sum x_{i,0} = 1. \quad (3.3.11)$$

Tato podmínka ale neplatí pro další uzly, což je důsledkem transakčních nákladů spojených s aktivními zásahy do portfolia.

Konečné bohatství investora

Na konci investičního horizontu v čase T , je střední hodnota bohatství investora $E(W_T)$ vypočtena jako vážený průměr konečných hodnot bohatství, dle jednotlivých scénářů $W_{e,T}$ dle vzorce

$$E(W_T) = \sum_e \pi_e \cdot W_{e,T}, \quad (3.3.12)$$

kde váhou jsou pravděpodobnosti jednotlivých scénářů.

Hodnota bohatství v jednotlivých scénářích je určena vztahem

$$W_{e,T} = \sum p_{i,e,T} \cdot k_{i,e,T-1}, \quad (3.3.13)$$

kde $p_{i,T}$ je cena i-tého aktiva v čase T a $k_{i,T-1}$ je počet kusů i-tého aktiva v uzlu předcházejícím uzlu v čase T pro daný scénář e .

Matematická formulace modelu

Matematickou formulaci lze rozdělit do tří úrovní (*Problém P1, P2 a P3*). První úroveň je formulace modelu pro výchozí uzel v čase $t = 0$. V této úrovni je vytvořeno portfolio investora. Druhá úroveň matematické formulace je dána pro uzly v čase $t = 1, \dots, T-1$, kde je portfolio investora vyvažováno. Na konci investičního horizontu v čase T jsou přeceněna portfolia v jednotlivých scénářích a poté je dopočtena střední hodnota bohatství.

Formulace modelu pro uzel $t = 0$ odpovídá matematické formulaci Markowitzova modelu, která je dána účelovou funkcí (UF1), rovnicí (R1) a omezujícími podmínkami (P1,...,P3)

Problém PR1 – Formulace modelu v čase $t = 0$

$$E(U) = \sum_{i=1}^n x_{i,t} \cdot E(r_{i,t}) - a \cdot \sigma_p^2 \rightarrow \max, \quad (\text{UF1})$$

$$x_{i,t} \geq 0, \text{ pro } i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{P1})$$

$$\sum x_{i,t} = 1, \quad (\text{P2})$$

$$\text{kde } \sigma_p^2 = \sqrt{\sum_i \sum_j x_{i,t} \sigma_{ij,t} x_{j,t}}. \quad (\text{R1})$$

Formulace modelu pro uzly v čase $t = 1, \dots, T-1$ je dána účelovou funkcí (UF1), rovnicemi (R1, R2, R3) a podmínkami (P1,...,P6).

Problém PR2 – Formulace modelu v čase $t = 1, \dots, T-1$

$$E(U) = \sum_{i=1}^n x_{i,t} \cdot E(r_{i,t}) - a \cdot \sigma_p^2 \rightarrow \max, \quad (\text{UF})$$

$$x_{i,t} = x_{i,t-1}^B + (1 - c) \cdot b_{i,t} - (1 - c) \cdot s_{i,t}, \quad (\text{R1})$$

$$x_{i,t-1}^B = \frac{k_{i,t-1} \cdot p_{i,t}}{\sum_{i=1}^n k_{i,t-1} \cdot p_{i,t}}, \quad (\text{R2})$$

$$\sum b_{i,t} - \sum s_{i,t} = 0, \quad (\text{P1})$$

$$\text{Jestliže } \Delta b_{i,t} > 0, \text{ pak } s_{i,t} = 0, \quad (\text{P2})$$

$$\text{Jestliže } \Delta s_{i,t} > 0, \text{ pak } b_{i,t} = 0, \quad (\text{P3})$$

$$x_{i,t} \geq 0, \text{ pro } i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{P4})$$

$$b_{i,t} \geq 0, \text{ pro } i = 1, 2, \dots N \quad (\text{P5})$$

$$s_{i,t} \geq 0. \text{ pro } i = 1, 2, \dots N \quad (\text{P6})$$

$$\text{kde } \sigma_p^2 = \sqrt{\sum_i \sum_j x_{i,t} \sigma_{ij,t} x_{j,t}}. \quad (\text{R3})$$

Index a , který v předešlém textu nebyl zmíněn, znázorňuje averzi investora k riziku.

Problém PR3 – Přecenění portfolií a výpočet střední hodnoty bohatství v čase T

Přecenění portfolia $(T-1)$ v čase T ,

$$w_{i,T} = k_{i,T-1} \cdot p_{i,T}. \quad (\text{R1})$$

Výpočet střední hodnoty bohatství v čase T ,

$$E(W_T) = \sum_e \pi_e \cdot W_{e,T}, \quad (\text{R2})$$

4. Aplikace dynamického programování při optimalizaci akciového portfolia

V praktické části této práce bude aplikován dynamický přístup k optimalizaci akciového portfolia na modelovém příkladu pomocí problémů *PR1*, *PR2* a *PR3*. Nejprve bude popsána modelová situace vycházející z tržních podmínek. Na scénáři předpokládaných tržních podmínek bude vysvětlen postup aplikace dynamického programování, jinak také označovaného jako flexibilní strategie při optimalizaci akciového portfolia. V první části aplikace bude vytvořeno původní portfolio, které bude tzv. „dopředným“ (forward) způsobem optimalizováno ve dvou fázích investičního horizontu. Výsledná střední hodnota bohatství při využití flexibilní strategie, vypočtena rekurentním (backward) způsobem, bude v další části této kapitoly porovnána s výslednou střední hodnotou bohatství, dosaženou aplikací pasivní strategie. Pasivní strategií se rozumí strategie „koupit a držet“, přičemž portfolio při využití této strategie není vyvažováno a má v celém investičním horizontu stejnou strukturu. Poslední část této kapitoly bude věnována hlubší analýze výsledků dosažených využitím flexibilní a pasivní strategie při aplikaci scénářů předpokládaných tržních podmínek, vysoké volatility tržního indexu a vysoké citlivosti akcií na tržním indexu.

4.1. Zadání modelové situace vycházející z tržních podmínek

Hledání optimálního portfolia vyžaduje popis investora a jeho indifferenčních křivek při výběru portfolia. V případě, že by aplikace modelu byla prováděna bez zjištění preferencí investora, nejednalo by se o optimalizaci, ale pouze o hledání efektivní množiny portfolií. Pro aplikaci tohoto modelu je proto nutné investora představit.

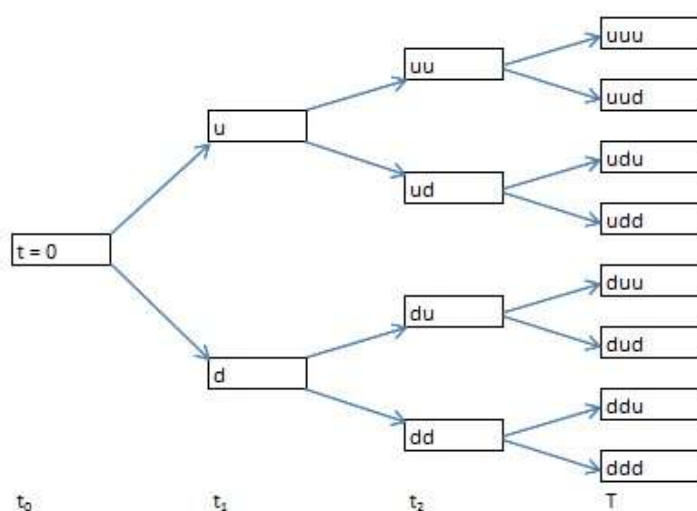
Počáteční bohatství investora je ve výši 1 000 tis. Kč, přičemž z celé sumy má být na počátku investičního horizontu vytvořeno akciové portfolio. Investiční horizont, ve kterém investor hodlá odložit svou spotřebu s vidinou kapitálového výnosu je v délce tří let. Investor se při optimalizaci svého portfolia rozhoduje, zda zvolí pasivní strategii „koupit a držet“ využívající statický Markowitzův přístup, nebo flexibilní strategii „vyvažování“ využívající dynamický přístup k optimalizaci portfolia. Averze k riziku investora má hodnotu $\alpha = 2,5$. Dynamickou optimalizaci přitom preferuje před optimalizací statickou a to z toho důvodu, že v diskrétních okamžicích, ve kterých lze vyvážit portfolio, chce mít přehled o všech parametrech své investice.

Pro sestavení optimálního akciového portfolia bylo vybráno 15 akciových titulů obchodovaných na české burze cenných papírů (RM-System). Vybranými tituly jsou akcie společností Exxon Mobil Corp. (Exxon), McDonald's Corp. (McD), ČEZ, a.s. (ČEZ), Telefonica O2 Czech. Rep. (O2), Philip Morris ČR (Tabák), Vienna Insurance Group (VIG), Intel Corp. (Intel), AAA Auto Group N.V. (AAA), Česká spořitelna, a.s. (Čspoř), Microsoft Corp. (MircSft), Central European Media Enterprises Ltd. (CETV), ORCO Property Group S.A. (Orco), Erste Group Bank AG (Erste), Komerční banka, a.s. (KB) a Volkswagen AG (VW). K těmto akciím byly z internetových stránek české burzy cenných papírů staženy denní historické závěrečné kurzy za posledních 5 let (od 8. 4. 2008 do 8. 4. 2013). Grafy historického vývoje všech titulů jsou uvedeny v příloze č. 1.

V případě, že by se jednalo o klasickou Markowitzovu optimalizaci, byla by tato data využita k sestavení kovarianční matice a vektoru střední hodnoty výnosu. Vzhledem k tomu, že bude prováděna dynamická optimalizace, je nutné data zúžit na interval odpovídající jedné fázi stromu scénářů.

Strom scénářů zobrazuje možný pohyb cen akcií v celém investičním horizontu. Počáteční stav $t = 0$ je okamžik vytvoření akciového portfolia. Stav u znamená pohyb trhu směrem vzhůru, stav d znázorňuje pohyb trhu směrem dolů. V grafu 4.1 lze vidět všechny předpokládané pohyby trhu v tříletém investičním horizontu, přičemž každá fáze je v délce jednoho roku.

Graf 4.1 Strom scénářů



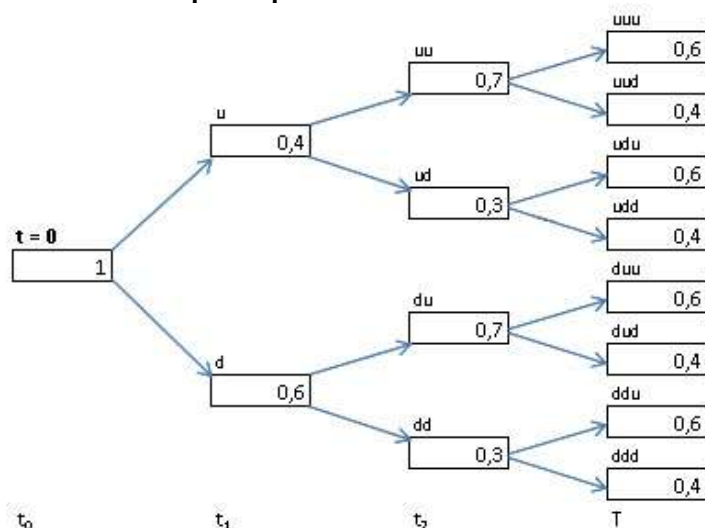
V uzlu $t = 0$ bude sestaveno původní portfolio. V uzlech u , d , uu , ud , du a dd bude proveden aktivní zásah a původní portfolio bude vyváženo prodejem a nákupem jednotlivých

akcií. Cílem tohoto zásahu je optimalizace portfolia při změně tržních podmínek. Původní portfolio totiž nemusí v celém investičním horizontu odpovídat preferencím investora. V uzlech uuu, \dots, ddd bude portfolio předchozích uzlů přeceněno aktuálními cenami a bude tak zjištěno bohatství investora dosažené v jednotlivých scénářích.

K tomu, aby mohla být vypočtena střední hodnota celkového bohatství, je nutné zjistit, s jakou pravděpodobností mohou jednotlivé scénáře nastat. Jak bylo zmíněno v kapitole 2.2.1, největší vliv na pohyb cen akcií mají makroekonomické veličiny. Jednou ze zásadních makroekonomických veličin je hrubý domácí produkt (HDP), jehož budoucí hodnoty prognózuje Česká národní banka (ČNB). Empirickým zkoumáním závislosti tržního indexu na HDP bylo zjištěno, že v dlouhodobém horizontu HDP tento index kopíruje.

Největší část roku 2013 je obsažena v uzlech v čase $t = 1$. ČNB prognózuje pokles HDP v roce 2013 ve výši -0,3%. Pravděpodobnost poklesu tržního indexu v čase $t = 1$ proto bude stanovena ve výši 60%. V čase $t = 2$ (v roce 2014) naopak ČNB prognózuje oživení ekonomiky a růst HDP o 4%. Pravděpodobnost růstu tržního indexu tedy bude stanovena ve výši 70%. Prognóza pro rok 2015 prozatím není k dispozici, nicméně můžeme předpokládat pokračování mírného růstu, způsobeného oživením v roce 2014. Graf 4.3 zobrazuje rozdělení pravděpodobnosti ve všech scénářích.

Graf 4.2 rozdělení pravděpodobnosti



4.2. Výpočet vstupních dat

Při sběru dat je nutné si uvědomit, že důležitější, než přesnost vypočtených vstupních dat využitých pro první fázi optimalizační úlohy, je schopnost navázat následující fáze stromu

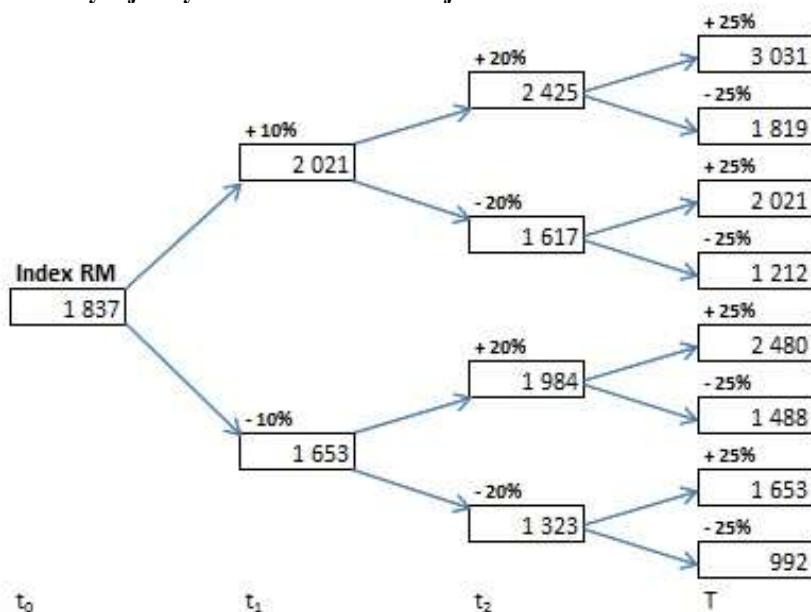
scénářů na vybraná data. Určení tříletého investičního horizontu s ročním vyvažováním tedy vylučuje možnost sběru detailních dat. Z denních dat proto byly vybrány pouze hodnoty k 8. dubnu daného roku. Z těchto hodnot byly zároveň vytvořeny grafy, na jejichž základě můžeme tvrdit, že vybrané hodnoty zobrazují hlavní trend cenného papíru. Uzavírací ceny akcií k uvedeným datům jsou znázorněny v Tab. 4.2.1.

Tab. 4.2.1 Historické ceny vybraných akcií k 8. dubnu v letech 2008 až 2013

Akcie	Exxon	McD	ČEZ	O2	Tabák	VIG	Intel	AAA	ČS	MicrSft	CETV	Orco	Erste	KB	VW
8.4.2008	1 420	899	1 230	508	7 301	1 208	340	20	830	474	1 461	1 474	1 090	3 991	4 664
8.4.2009	1 380	1 128	769	415	5 795	680	306	9	753	386	278	126	379	2 515	6 290
8.4.2010	1 290	1 263	902	438	9 933	977	422	14	965	559	565	190	806	3 952	1 841
8.4.2011	1 455	1 326	887	405	10 551	1 008	352	26	860	455	368	234	880	4 390	2 621
6.4.2012	1 592	1 867	781	380	11 800	795	523	19	845	585	137	91	383	3 540	2 946
8.4.2013	1 770	2 003	576	283	11 780	960	414	23	850	562	79	53	569	3 743	3 755

V prvním kroku práce s těmito daty je potřeba vypočítat ceny jednotlivých akcií ve všech uzlech investičního stromu. Jedním z možných přístupů, který byl využit také v tomto příkladu, je navázání všech titulů na jednu společnou proměnnou. Touto proměnnou může být například tržní index RM, jelikož jsme schopni vypočítat citlivost všech akcií na tomto indexu a určit tak ceny akcií ve všech krocích. Bylo stanoveno, že v následujících třech letech, se index RM může pohybovat dle grafu 4.3.

Graf 4.3 Vývoj ceny indexu RM v následujících třech letech



Z grafu 4.3 je patrné, že pohyby byly nastaveny tak, aby zahrnovaly i extrémní výkyvy v době hospodářské recese nebo extrémního růstu.

Úpravou vztahu (2.3.5) lze jednoduše stanovit citlivost jednotlivých akcií na tomto portfoliu, označovanou též jako beta-koefficient (β). Pro větší přesnost byl β -koefficient propočten na denních datech za posledních 5 let. Vývoj jednotlivých akcií závislý na citlivosti na tržním portfoliu je zaznamenán v Tab. 4.2.2

Tab. 4.2.2 Vývoj jednotlivých titulů při růstu a poklesu tržního indexu

Akcie	8.4.2013	β	u_{t1}	d_{t1}	u_{t2}	d_{t2}	u_{t3}	d_{t3}
Exxon	1 770	0,15	2%	-2%	3%	-3%	4%	-4%
McD	2 003	0,15	1%	-1%	3%	-3%	4%	-4%
ČEZ	576	1,00	10%	-10%	20%	-20%	25%	-25%
O2	283	0,55	5%	-5%	11%	-11%	14%	-14%
Tabák	11 780	0,48	5%	-5%	10%	-10%	12%	-12%
VIG	960	0,88	9%	-9%	18%	-18%	22%	-22%
Intel	414	0,39	4%	-4%	8%	-8%	10%	-10%
AAA	23	0,74	7%	-7%	15%	-15%	19%	-19%
ČS	850	0,21	2%	-2%	4%	-4%	5%	-5%
MicrSft	562	0,25	3%	-3%	5%	-5%	6%	-6%
CETV	79	1,59	16%	-16%	32%	-32%	40%	-40%
Orco	53	0,79	8%	-8%	16%	-16%	20%	-20%
Erste	569	1,76	18%	-18%	35%	-35%	44%	-44%
KB	3 743	1,14	11%	-11%	23%	-23%	28%	-28%
VW	3 755	0,45	5%	-5%	9%	-9%	11%	-11%
Rm	0	1	10%	-10%	20%	-20%	25%	-25%

Ceny akcií ve všech uzlech jsou vypočteny pomocí Tab. 4.2.2 a jsou součástí přílohy č. 2.

V dalším kroku práce se vstupními daty je vypočten očekávaný výnos jednotlivých akcií v počátečním uzlu $t = 0$ pomocí vztahů (2.3.2) a (2.3.3). Propočet znázorňuje Tab. 4.2.3.

Tab. 4.2.3 Výpočet očekávaného výnosu jednotlivých akcií v čase $t = 0$

Akcie	Exxon	McD	ČEZ	O2	Tabák	VIG	Intel	AAA	ČS	MicrSft	CETV	Orco	Erste	KB	VW
8.4.2009	-3%	25%	-37%	-18%	-21%	-44%	-10%	-56%	-9%	-18%	-81%	-91%	-65%	-37%	35%
8.4.2010	-6%	12%	17%	5%	71%	44%	38%	57%	28%	45%	103%	51%	113%	57%	-71%
8.4.2011	13%	5%	-2%	-8%	6%	3%	-17%	87%	-11%	-19%	-35%	23%	9%	11%	42%
6.4.2012	9%	41%	-12%	-6%	12%	-21%	48%	-27%	-2%	28%	-63%	-61%	-56%	-19%	12%
8.4.2013	11%	7%	-26%	-25%	0%	21%	-21%	23%	1%	-4%	-43%	-41%	49%	6%	27%
E(R_i)	5%	18%	-12%	-10%	14%	1%	8%	17%	1%	6%	-24%	-24%	10%	4%	9%

Z Tab. 4.2.3 je zřejmé, že největší výnos od propuknutí finanční krize v roce 2008 zaznamenávají tituly McDonald's Corp., AAA Auto Group N.V., Philip Morris ČR a Erste Group Bank AG. Naopak velmi vyhledávané tituly ČEZ a.s. a Telefonica O2 Czech Rep., investory označované jako „sázka na jistotu“, zaznamenávají propad o 12% resp. 10%.

Následujícím krokem je výpočet kovarianční matice vyjadřující statistickou závislost i-tého a j-tého aktiva. Pomocí kovarianční matice je v procesu optimalizace vypočteno riziko portfolia. Kovariance mezi jednotlivými aktivy je vypočtena pomocí vztahu (2.3.6) a je znázorněna v Tab. 4.2.4.

Tab. 4.2.4 Kovarianční matice v čase $t = 0$

Akcie	Exxon	McD	ČEZ	O2	Tabák	VIG	Intel	AAA	ČS	MicrSft	CETV	Orco	Erste	KB	VW
Exxon	3%	-1%	-1%	-2%	-5%	-1%	-4%	5%	-3%	-4%	-14%	-2%	-7%	-3%	11%
McD	-1%	9%	-3%	1%	-4%	-13%	12%	-28%	-1%	5%	-17%	-22%	-31%	-13%	1%
ČEZ	-1%	-3%	18%	9%	27%	21%	15%	37%	9%	16%	53%	47%	44%	26%	-29%
O2	-2%	1%	9%	6%	14%	6%	12%	11%	5%	10%	26%	20%	14%	11%	-16%
Tabák	-5%	-4%	27%	14%	48%	37%	29%	43%	20%	33%	97%	66%	81%	44%	-60%
VIG	-1%	-13%	21%	6%	37%	47%	6%	62%	16%	20%	84%	68%	100%	47%	-42%
Intel	-4%	12%	15%	12%	29%	6%	43%	-12%	12%	34%	41%	13%	7%	12%	-41%
AAA	5%	-28%	37%	11%	43%	62%	-12%	138%	11%	6%	101%	128%	127%	67%	-28%
ČS	-3%	-1%	9%	5%	20%	16%	12%	11%	10%	15%	43%	23%	37%	18%	-28%
MicrSft	-4%	5%	16%	10%	33%	20%	34%	6%	15%	33%	59%	27%	40%	23%	-46%
CETV	-14%	-17%	53%	26%	97%	84%	41%	101%	43%	59%	214%	147%	193%	99%	-125%
Orco	-2%	-22%	47%	20%	66%	68%	13%	128%	23%	27%	147%	141%	146%	79%	-66%
Erste	-7%	-31%	44%	14%	81%	100%	7%	127%	37%	40%	193%	146%	222%	102%	-97%
KB	-3%	-13%	26%	11%	44%	47%	12%	67%	18%	23%	99%	79%	102%	51%	-51%
VW	11%	1%	-29%	-16%	-60%	-42%	-41%	-28%	-28%	-46%	-125%	-66%	-97%	-51%	85%

Proto, aby mohla být provedena dynamická optimalizace portfolia v uzlech v čase $t = 1$ a $t = 2$, je nutné převést vstupní údaje do stromu scénářů. Ceny jednotlivých akcií byly stanoveny pro všechny uzly pomocí možného vývoje tržního indexu a citlivosti akcií na této proměnné. Dalším krokem je tedy zohlednění těchto cen v jednotlivých uzlech a výpočet očekávaného výnosu akcií a kovarianční matice pro všechny uzly.

Jako příklad budou uvedeny ceny akcií v uzlu du , jejich očekávaný výnos a kovarianční matice postupně v Tab. 4.2.5, Tab. 4.2.6 a Tab. 4.2.7.

Tab. 4.2.5 Ceny vybraných akcií v čase $t=2$ a uzlu du

Akcie	Exxon	McD	ČEZ	O2	Tabák	VIG	Intel	AAA	ČS	MicrSft	CETV	Orco	Erste	KB	VW
8.4.2008	1 420	899	1 230	508	7 301	1 208	340	20	830	474	1 461	1 474	1 090	3 991	4 664
8.4.2009	1 380	1 128	769	415	5 795	680	306	9	753	386	278	126	379	2 515	6 290
8.4.2010	1 290	1 263	902	438	9 933	977	422	14	965	559	565	190	806	3 952	1 841
8.4.2011	1 455	1 326	887	405	10 551	1 008	352	26	860	455	368	234	880	4 390	2 621
6.4.2012	1 592	1 867	781	380	11 800	795	523	19	845	585	137	91	383	3 540	2 946
8.4.2013	1 770	2 003	576	283	11 780	960	414	23	850	562	79	53	569	3 743	3 755
8.4.2014	1 743	1 973	518	267	11 218	875	398	22	832	548	66	49	469	3 316	3 585
8.4.2015	1 796	2 032	622	297	12 288	1 030	429	25	867	576	87	57	634	4 072	3 909

Tab. 4.2.6 Výpočet očekávaného výnosu jednotlivých akcií v čase $t = 2$ a uzlu du

Akcie	Exxon	McD	ČEZ	O2	Tabák	VIG	Intel	AAA	ČS	MicrSft	CETV	Orco	Erste	KB	VW
8.4.2009	-3%	25%	-37%	-18%	-21%	-44%	-10%	-56%	-9%	-18%	-81%	-91%	-65%	-37%	35%
8.4.2010	-6%	12%	17%	5%	71%	44%	38%	57%	28%	45%	103%	51%	113%	57%	-71%
8.4.2011	13%	5%	-2%	-8%	6%	3%	-17%	87%	-11%	-19%	-35%	23%	9%	11%	42%
6.4.2012	9%	41%	-12%	-6%	12%	-21%	48%	-27%	-2%	28%	-63%	-61%	-56%	-19%	12%
8.4.2013	11%	7%	-26%	-25%	0%	21%	-21%	23%	1%	-4%	-43%	-41%	49%	6%	27%
8.4.2014	-2%	-1%	-10%	-5%	-5%	-9%	-4%	-7%	-2%	-3%	-16%	-8%	-18%	-11%	-5%
8.4.2015	3%	3%	20%	11%	10%	18%	8%	15%	4%	5%	32%	16%	35%	23%	9%

E(R_i)	4%	13%	-7%	-7%	10%	2%	6%	13%	1%	5%	-15%	-16%	10%	4%	7%
-------------------------	-----------	------------	------------	------------	------------	-----------	-----------	------------	-----------	-----------	-------------	-------------	------------	-----------	-----------

Tab. 4.2.7 Kovarianční matice v čase $t = 2$ a uzlu du

Akcie	Exxon	McD	ČEZ	O2	Tabák	VIG	Intel	AAA	ČS	MicrSft	CETV	Orco	Erste	KB	VW
Exxon	3%	1%	-2%	-2%	-4%	-1%	-3%	6%	-3%	-4%	-15%	-4%	-5%	-3%	12%
McD	1%	13%	-7%	-2%	-1%	-14%	14%	-24%	-1%	7%	-24%	-29%	-29%	-12%	3%
ČEZ	-2%	-7%	27%	15%	26%	26%	15%	37%	10%	16%	68%	57%	51%	32%	-29%
O2	-2%	-2%	15%	9%	13%	9%	11%	11%	5%	9%	35%	27%	18%	14%	-17%
Tabák	-4%	-1%	26%	13%	50%	39%	30%	47%	21%	35%	95%	63%	85%	46%	-58%
VIG	-1%	-14%	26%	9%	39%	51%	7%	64%	17%	21%	93%	73%	107%	51%	-41%
Intel	-3%	14%	15%	11%	30%	7%	44%	-9%	12%	35%	41%	12%	10%	14%	-39%
AAA	6%	-24%	37%	11%	47%	64%	-9%	143%	12%	7%	101%	125%	133%	70%	-25%
ČS	-3%	-1%	10%	5%	21%	17%	12%	12%	10%	16%	44%	23%	39%	19%	-28%
MicrSft	-4%	7%	16%	9%	35%	21%	35%	7%	16%	34%	58%	26%	42%	25%	-45%
CETV	-15%	-24%	68%	35%	95%	93%	41%	101%	44%	58%	240%	165%	205%	108%	-125%
Orco	-4%	-29%	57%	27%	63%	73%	12%	125%	23%	26%	165%	155%	151%	84%	-67%
Erste	-5%	-29%	51%	18%	85%	107%	10%	133%	39%	42%	205%	151%	236%	111%	-93%
KB	-3%	-12%	32%	14%	46%	51%	14%	70%	19%	25%	108%	84%	111%	57%	-49%
VW	12%	3%	-29%	-17%	-58%	-41%	-39%	-25%	-28%	-45%	-125%	-67%	-93%	-49%	87%

V Tab. 4.2.5 jsou přidány možné ceny v čase $t = 2$ náležící uzlům d (8. 4. 2014) a du (8. 4. 2015). Na základě těchto aktualizovaných cen je vypočten očekávaný výnos akcií, který znázorňuje Tab. 4.2.6 a poté je aktualizována kovarianční matice (Tab. 4.2.7). Tímto

způsobem jsou aktualizovány hodnoty ve všech stanovených uzlech, mimo uzly uuu, \dots, ddd v čase T .

4.3. Postup při aplikaci flexibilní strategie v tržních podmínkách

Dynamická optimalizace portfolia probíhá ve třech fázích. První fáze v čase $t = 0$ zahrnuje vytvoření portfolia akcií z původního bohatství investora pomocí klasického Markowitzova modelu. Tento model je pro první fázi dostačující z toho důvodu, že pokud investor opravdu uvažuje o vytvoření akciového portfolia, je si vědom transakčních nákladů souvisejících s nákupem akcií. Transakční náklady jsou při tvorbě portfolia nutným a nevyhnutelným nákladem a při dané úrovni bohatství a sazbě transakčních nákladů budou vždy ve stejné výši. Pouze v některých případech by bylo tyto náklady vhodné vyčíslit již při tvorbě portfolia a to tehdy, pokud by investor například porovnával kapitálový výnos z držby akcií s úrokovým výnosem, získaném držbou termínových vkladů.

Druhá fáze dynamické optimalizace v čase $t = 1$ a $t = 2$ je fází provádění aktivních zásahů do portfolia. Aktivními zásahy se rozumí nákupy $b_{i,t}$ a prodeje $s_{i,t}$ akcií v takové struktuře, aby portfolio po provedení zásahu bylo toho času optimální. S nákupem a prodejem akcií souvisejí transakční náklady c , které jsou fixně dány ve výši 1% z objemu obchodu.

Ve třetí fázi v čase T je zhodnocena účinnost provádění aktivních zásahů přeceněním portfolií získaných na konci druhé fáze (v uzlech uu , ud , du a dd).

4.3.1. Stanovení optimálního portfolia v čase $t = 0$

Jak již bylo zmíněno, optimální portfolio v úvodním uzlu stromu scénářů je stanoveno pomocí klasického Markowitzova modelu. Problém (PR1) je řešen v MS EXCEL pomocí Řešitele jako úloha nelineárního programování. Formulace modelu je následující.

Problém PR1 – Formulace modelu v čase $t = 0$

$$E(U) = \sum_{i=1}^n x_{i,t} \cdot E(r_{i,t}) - a \cdot \sigma_p^2 \rightarrow \max, \quad (\text{UF1})$$

$$x_{i,t} \geq 0, \text{ pro } i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{P1})$$

$$\sum x_{i,t} = 1, \quad (\text{P2})$$

$$\text{kde } \sigma_p^2 = \sqrt{\sum_i \sum_j x_{i,t} \sigma_{ij,t} x_{j,t}}. \quad (\text{R1})$$

Podmínka (P1) zakazuje krátký prodej akcií a podmínka (P2) znamená, že v portfoliu musí být obsaženo 100%. Koeficient averze investora k riziku a je stanoven dle zadání modelové situace ve výši 2,5.

Prvním krokem při řešení této úlohy je příprava vektoru proměnných $x_{i,0}$. Tento vektor znázorňuje váhy jednotlivých akcií v portfoliu a je vyjádřen v procentech. Zpočátku je naplněn nulami a při řešení úlohy je oblast tohoto vektoru oblastí měněných buněk. Následně je pomocí funkce $\text{SOUČIN.SKALÁRNÍ}(\overrightarrow{x_{i,0}}; \overrightarrow{E(r_i)})$ vypočtena střední hodnota výnosu portfolia $E(r_p)$ a pomocí funkce $\text{SOUČIN.SKALÁRNÍ}((\text{SOUČIN.MATIC}(\overrightarrow{x_{i,0}}; \overrightarrow{\sigma_{ij,0}})); \overrightarrow{x_{i,0}})$ je vypočten rozptyl portfolia σ_p^2 . Aby bylo riziko srovnatelné s očekávaným výnosem, je nutné rozptyl portfolia odmocnit, čímž dostaneme směrodatnou odchylku portfolia σ_p .

Řešení úlohy (nalezení optimálního složení portfolia $x_{i,0}$ při splnění omezujících podmínek) je nalezeno pomocí *Řešitele* a je znázorněno v Tab. 4.3.1.

Tab. 4.3.1 Složení portfolia v čase $t = 0$

Akcie	$x_{i,0}$	W_0	$k_{i,0}$
Exxon	0%	0	0
McD	69%	688 437	344
ČEZ	0%	0	0
O2	0%	0	0
Tabák	0%	0	0
VIG	0%	0	0
Intel	0%	0	0
AAA	7%	65 233	2 800
ČS	0%	0	0
MicrSft	0%	0	0
CETV	0%	0	0
Orco	0%	0	0
Erste	11%	113 527	200
KB	0%	0	0
VW	13%	132 802	35
Σ	100%	1 000 000	

Z Tab. 4.3.1 lze vyčíst, že největší část prostředků je vložena do akcií McDonald's Corp. (69%). Portfolio dále obsahuje akcie Volkswagen AG (13%), Erste Group Bank AG (11%) a akcie AAA Auto Group N.V., které jsou v portfoliu zastoupeny 7% podílem. Ostatní akcie vzhledem k nízkému, potažmo zápornému výnosu a vysokému riziku nejsou v portfoliu zastoupeny.

Sloupec $w_{i,0}$ vypočtený dle vztahu (3.3.1) ukazuje hodnotu jednotlivých akcií zastoupených v portfoliu v peněžním vyjádření. Suma $w_{i,0}$ znázorňuje bohatství investora na počátku investičního horizontu, v našem případě ve výši 1 000 tis. Kč.

Sloupec $k_{i,0}$ vypočtený dle vztahu (3.3.2) znázorňuje zastoupení jednotlivých akcií v kusech. Tento sloupec je důležitý pro následující fázi, jelikož v této fázi je portfolio přeceněno vynásobením počtu kusů a aktuální ceny akcie.

V Tab. 4.3.2 je doplněn očekávaný výnos portfolia, riziko portfolia znázorněno rozptylem a směrodatnou odchylkou a hodnota účelové funkce.

Tab. 4.3.2 Parametry optimálního portfolia v čase t_0

Parametr	Hodnota
$E(r_p)$	16%
σ_p^2	1%
σ_p	7%
UF	15%

4.3.2. Vyvažování portfolia v časech $t = 1$ a $t = 2$

V uzlech u , d , uu , ud , du a dd je portfolio vyvažováno nákupem a prodejem akcií s cílem optimalizovat portfolio při změnách tržních podmínek. Na příkladu v uzlu u si ukážeme, jakým způsobem lze portfolio optimalizovat se zahrnutím transakčních nákladů.

Prvním krokem k úspěšnému vyvážení portfolia je zjištění struktury akcií zastoupených v portfoliu v předchozím uzlu. Jelikož vyvažujeme portfolio uzlu u , je potřeba zjistit strukturu optimálního portfolia vypočtenou v uzlu původním, tedy v čase $t = 0$. V tomto uzlu bylo složení portfolia následující: akcie McDonald's Corp. (344 ks), akcie AAA Auto Group N.V. (2 800 ks), akcie Erste Group Bank AG (200 ks) a akcie Volkswagen AG (35 ks). Uvažujme tedy, že v čase $t = 0$ investor nakoupil zmíněné množství akcií. O rok později se ceny těchto akcií změnila a tím se změnila také hodnota bohatství investora. Jelikož se ceny akcií nepohybují stejným tempem a směrem, změnil se také vektor x , tedy váhy jednotlivých akcií v portfoliu. Tyto změny reflektuje Tab. 4.3.3.

Tab. 4.3.3 Přecenění portfolia v uzlu u

Akcie	Původní $x_{i,t-1}$	$k_{i,0}$	$w_{i,t-1}^B$	$x_{i,t-1}^B$
Exxon	0%	0	0	0%
McD	69%	344	698 591	67%
ČEZ	0%	0	0	0%
O2	0%	0	0	0%
Tabák	0%	0	0	0%
VIG	0%	0	0	0%
Intel	0%	0	0	0%
AAA	7%	2 800	70 089	7%
ČS	0%	0	0	0%
MicrSft	0%	0	0	0%
CETV	0%	0	0	0%
Orco	0%	0	0	0%
Erste	11%	200	133 498	13%
KB	0%	0	0	0%
VW	13%	35	138 804	13%
	100%		1 040 983	100%

Původní vektor $x_{i,t-1}$ zobrazuje váhy jednotlivých aktiv zastoupených v portfoliu v předešlém uzlu a $k_{i,t-1}$ ukazuje počet těchto akcií (viz. také Tab. 4.3.1). Změna nastala ve sloupci $w_{i,t-1}^B$ vypočteném pomocí vztahu (3.3.4) a ve sloupci $x_{i,t-1}^B$ vypočteném pomocí rovnice (3.3.6).

Vektor $w_{i,t-1}^B$ ukazuje přeceněnou hodnotu aktiv vyjádřenou v peněžních jednotkách a jeho suma udává hodnotu portfolia v čase $t = 1$ a uzlu u . Je zřejmé, že portfolio by při realizaci scénáře vedoucího do uzlu u , generovalo po prvním roce investičního horizontu kapitálový zisk ve výši 41 tis. Kč.

Vektor $x_{i,t-1}^B$ udává rozdělení aktiv v portfoliu po přecenění aktuálními cenami. Je označen indexem B , jelikož se jedná o vektor vah před aktivním zásahem do portfolia. Jedná-li se o dynamickou optimalizaci, je nutné aktivní zásah provést.

Postup vyvažování portfolia začíná přípravou vektorů $x_{i,t}$, $b_{i,t}$ a $s_{i,t}$. Vektor $x_{i,t}$ je vektorem nových vah aktiv v portfoliu po provedení aktivního zásahu. V uzlech, ve kterých se aktivní zásahy provádějí, není tento vektor měněnou buňkou pomocí *Řešitele*, jako v případě Markowitzova modelu. Vektor $x_{i,t}$ je zde vypočten dle vztahu (3.3.5) a v případě, že není proveden žádný aktivní zásah, je roven vektoru $x_{i,t-1}^B$, jak naznačuje Tab. 4.3.4.

Tab. 4.3.4 Vektory před provedením aktivního zásahu

Akcie	$b_{i,t}$	$s_{i,t}$	$x_{i,t}$
Exxon	0%	0%	0%
McD	0%	0%	67%
ČEZ	0%	0%	0%
O2	0%	0%	0%
Tabák	0%	0%	0%
VIG	0%	0%	0%
Intel	0%	0%	0%
AAA	0%	0%	7%
ČS	0%	0%	0%
MicrSft	0%	0%	0%
CETV	0%	0%	0%
Orco	0%	0%	0%
Erste	0%	0%	13%
KB	0%	0%	0%
VW	0%	0%	13%
	0%	0%	100%

Sloupce $b_{i,t}$ a $s_{i,t}$ znázorňují vektory nákupů (buy) a prodejů (sell). Tyto vektory jsou při vyvažování portfolia měněnými buňkami pomocí *Řešitele*. Formulace modelu je následující.

Problém PR2 – Formulace modelu v čase $t = 1, \dots, T-1$

$$E(U) = \sum_{i=1}^n x_{i,t} \cdot E(r_{i,t}) - a \cdot \sigma_p^2 \rightarrow \max, \quad (\text{UF})$$

$$x_{i,t} = x_{i,t-1}^B + (1 - c) \cdot b_{i,t} - (1 - c) \cdot s_{i,t}, \quad (\text{R1})$$

$$x_{i,t-1}^B = \frac{k_{i,t-1} \cdot p_{i,t}}{\sum_{i=1}^n k_{i,t-1} \cdot p_{i,t}}, \quad (\text{R2})$$

$$\sum b_{i,t} - \sum s_{i,t} = 0, \quad (\text{P1})$$

$$\text{Jestliže } \Delta b_{i,t} > 0, \text{ pak } s_{i,t} = 0, \quad (\text{P2})$$

$$\text{Jestliže } \Delta s_{i,t} > 0, \text{ pak } b_{i,t} = 0, \quad (\text{P3})$$

$$x_{i,t} \geq 0, \text{ pro } i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{P4})$$

$$b_{i,t} \geq 0, \text{ pro } i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{P5})$$

$$s_{i,t} \geq 0, \text{ pro } i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{P6})$$

$$\text{kde } \sigma_p^2 = \sqrt{\sum_i \sum_j x_{i,t} \sigma_{ij,t} x_{j,t}}. \quad (\text{R3})$$

Zavedením podmínky (P1) je splněn předpoklad samofinancování portfolia, podmínky (P2 a P3) zamezují současnému nákupu a prodeji jednoho aktiva a podmínky (P4, P5 a P6)

zakazují krátký prodej. Koeficient averze investora k riziku a je stanoven dle zadání modelové situace ve výši 2,5.

Pomocí funkce $\text{SOUČIN.SKALÁRNÍ}(\vec{x}_{i,t}; \vec{E}(r_{i,t}))$ je opět vypočtena střední hodnota výnosu portfolia $E(r_p)$ a pomocí funkce $\text{SOUČIN.SKALÁRNÍ}((\text{SOUČIN.MATIC}(\vec{x}_{i,t}; \vec{\sigma}_{i,t})); \vec{x}_{i,t})$ je vypočten rozptyl portfolia σ_p^2 , jehož druhou odmocninou je směrodatná odchylka portfolia.

Řešení úlohy (optimalizace portfolia za předpokladu existence transakčních nákladů) je nalezeno pomocí *Řešitele* a je znázorněno v Tab. 4.3.5.

Tab. 4.3.5 Vektory po provedení aktivního zásahu v uzlu u

Akcie	$b_{i,t}$	$s_{i,t}$	$x_{i,t}$
Exxon	0%	0%	0%
McD	0%	4%	63%
ČEZ	0%	0%	0%
O2	0%	0%	0%
Tabák	0%	0%	0%
VIG	0%	0%	0%
Intel	0%	0%	0%
AAA	0%	5%	2%
ČS	0%	0%	0%
MicrSft	0%	0%	0%
CETV	0%	0%	0%
Orco	0%	0%	0%
Erste	4%	0%	16%
KB	0%	0%	0%
VW	5%	0%	18%
	9%	9%	99,8%

Z Tab. 4.3.5 je patrné, že aktivním zásahem byla mírně pozměněna struktura portfolia. 9% původního portfolia bylo prodáno a následně byly nakoupeny jiné akcie ve stejné hodnotě. Změnu ve výši několika procent zaznamenaly všechny akcie obsažené v portfoliu. Podíl akcií společnosti McDonald's Corp v portfoliu klesl z původních 67% na 63%. Poklesl také podíl akcií společnosti AAA Auto Group N.V. v portfoliu a to z původních 7% na 2%. Naopak podíl společnost Erste Group Bank AG vzrostl o 4% z celkového bohatství, stejně jako podíl společnosti Volkswagen AG, který vzrostl o 5% z celkového bohatství.

Za povšimnutí stojí suma vektoru vah $x_{i,t}$. V Markowitzově modelu je nutné, aby tato hodnota byla rovna jedné (100%), což lze ověřit v omezujících podmínkách tohoto modelu (viz. formulace problému *PR1*). Při vyvažování portfolia ovšem tato hodnota nemůže být

rovna jedné a to z důvodu existence transakčních nákladů. Pokud by model po vyvážení aktivními zásahy splňoval Markowitzovu podmínku, znamenalo by to, že jsou do portfolia přidávány peněžní prostředky a sumy vektorů $b_{i,t}$ a $s_{i,t}$, by nemohly být rovny.

Nová úroveň bohatství je propočtena využitím rovnic (3.3.7) a (3.3.8) a rozdělení bohatství po provedení aktivního zásahu uvádí Tab. 4.3.6.

Tab. 4.3.6 Rozdělení bohatství po aktivním zásahu

Akcie	$x_{i,t}$	$k_{i,t}$	$w_{i,t}$
Exxon	0%	0	0
McD	63%	323	657 020
ČEZ	0%	0	0
O2	0%	0	0
Tabák	0%	0	0
VIG	0%	0	0
Intel	0%	0	0
AAA	2%	744	18 638
ČS	0%	0	0
MicrSft	0%	0	0
CETV	0%	0	0
Orco	0%	0	0
Erste	16%	257	171 657
KB	0%	0	0
VW	18%	49	191 826
	100%		1 039 141

Vektor $k_{i,t}$ uvádí počet jednotlivých akcií ve vyváženém portfoliu, vektor $w_{i,t}$ uvádí jejich hodnotu v peněžním vyjádření. Celková suma W_t ve výši 1 039 tis. Kč je o 2 tis. Kč nižší, než hodnota portfolia před vyvážením (viz. suma W_t^B v Tab. 4.3.3). Rozdíl tvoří absolutní výše transakčních nákladů zaplacených za nákup a prodej akcií při vyvažování.

Tab. 4.3.7 doplňuje informace o vyváženém portfoliu, tedy očekávaný výnos portfolia $E(r_p)$, rozptyl σ_p^2 a směrodatnou odchylku portfolia σ_p , sazbu transakčních nákladů c a transakční náklady v absolutním vyjádření c^{ABS} .

Tab. 4.3.7 Parametry optimálního portfolia

Parametr	Hodnota
$E(r_p)$	13%
σ_p^2	1%
σ_p	11%
c	1%
c^{ABS}	1 842

V této chvíli je tedy portfolio v uzlu u vyváženo. Následující uzly uu a ud jsou vyváženy stejným způsobem, přičemž v těchto uzlech je základem pro výpočet vektoru x struktura portfolio nalezená v uzlu u . Uvedený postup je stejný pro všechny uzly, ve kterých je portfolio vyvažováno. Výsledné vektory a parametry uzlů u , d , uu , ud , du a dd jsou součástí přílohy č. 3.

4.3.3. Výsledné bohatství investora v čase T

Na konci investičního horizontu v čase T již není portfolio vyvažováno, ale je zjišťována výsledná hodnota bohatství investora. Portfolia vytvořená v předchozích uzlech v čase $T - 1$ (v tomto případě $T - 1 = t_2$) jsou přeceněna aktuálními cenami. Příklad přecenění a zjištění konečné hodnoty portfolio je uveden na příkladu v uzlech duu a dud v Tab. 4.3.8.

Tab. 4.3.8 Přecenění portfolio du v čase T

Akcie	$x_{i,T-1}$	$k_{i,T-1}$	$w_{i,T-1}$	Cena duu	Cena dud	$w_{i,T}^{duu}$	$w_{i,T}^{dud}$
Exxon	0%	0	0	1 863	1 728	0	0
McD	35%	177	359 316	2 107	1 957	372 566	346 066
ČEZ	0%	0	0	778	466	0	0
O2	0%	0	0	337	256	0	0
Tabák	0%	0	0	13 754	10 823	0	0
VIG	0%	0	0	1 256	803	0	0
Intel	0%	0	0	471	387	0	0
AAA	5%	1 896	46 971	29	20	55 712	38 230
ČS	39%	466	403 552	912	822	424 486	382 617
MicrSft	0%	0	0	612	539	0	0
CETV	0%	0	0	122	52	0	0
Orco	0%	0	0	68	46	0	0
Erste	3%	53	33 367	913	355	48 041	18 693
KB	0%	0	0	5 232	2 912	0	0
VW	18%	47	185 065	4 351	3 468	205 975	164 155
	99,1%		1 028 270			1 106 779	949 761

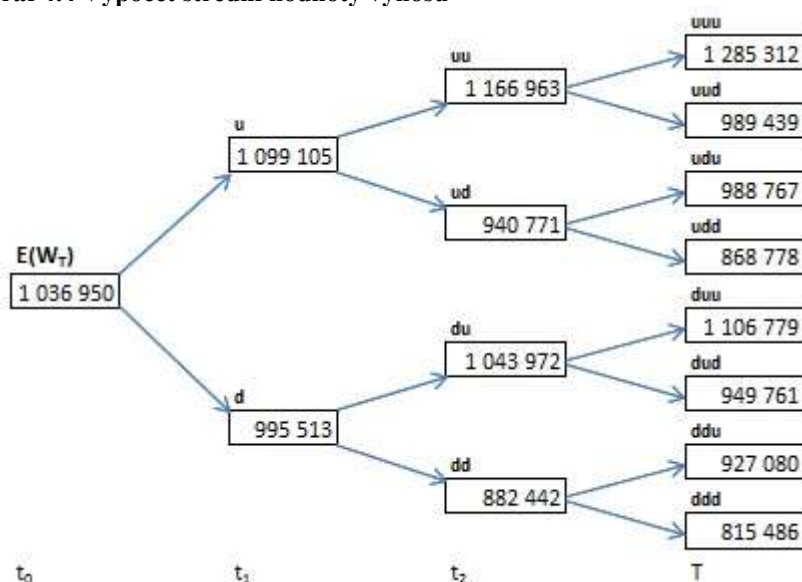
Hodnota portfolio v čase T a uzlu duu je 1 107 tis. Kč. Absolutní zisk portfolio v tomto scénáři je tedy 107 tis. Kč. Hodnota portfolio v čase T a uzlu dud je 949 tis. Kč, což představuje ztrátu ve výši 50 tis. Kč. Stejným způsobem jsou propočteny hodnoty portfolio ve všech scénářích. Tyto hodnoty jsou uvedeny v Tab. 4.3.9

Tab. 4.3.9 Hodnota portfolií ve všech scénářích v čase T

Akcie	$W_{i,T}^{uuu}$	$W_{i,T}^{uud}$	$W_{i,T}^{udu}$	$W_{i,T}^{udd}$	$W_{i,T}^{duu}$	$W_{i,T}^{dud}$	$W_{i,T}^{ddu}$	$W_{i,T}^{ddd}$
Exxon	0	0	0	0	0	0	0	0
McD	688 604	639 625	229 151	212 852	372 566	346 066	278 133	258 350
ČEZ	0	0	0	0	0	0	0	0
O2	0	0	0	0	0	0	0	0
Tabák	0	0	0	0	0	0	0	0
VIG	0	0	0	0	0	0	0	0
Intel	0	0	0	0	0	0	0	0
AAA	0	0	40 190	27 579	55 712	38 230	60 952	41 826
ČS	0	0	526 724	474 770	424 486	382 617	447 306	403 187
MicrSft	0	0	0	0	0	0	0	0
CETV	32 539	13 999	0	0	0	0	0	0
Orco	0	0	0	0	0	0	0	0
Erste	262 390	102 099	0	0	48 041	18 693	0	0
KB	28 258	15 729	0	0	0	0	0	0
VW	273 521	217 987	192 702	153 577	205 975	164 155	140 688	112 123
	1 285 312	989 439	988 767	868 778	1 106 779	949 761	927 080	815 486

Výpočet hodnot portfolií v jednotlivých scénářích uzavírá „dopřednou“ (forward) část dynamické optimalizace. Nyní již zbývá pouze dopočet střední hodnoty bohatství investora. Toto lze provést pomocí rovnice (R2) uvedené v matematické formulaci problému $PR3$, nebo analytickým rekurentním (backward) způsobem ve tvaru $W_{t,e} = (\pi \cdot W_{t+1,e+1}^u + (1 - \pi) \cdot W_{t+1,e+1}^d)$. Pro lepší znázornění výpočtu střední hodnoty bohatství bude výpočet proveden druhým ze zmíněných postupů, jak je uvedeno v grafu 4.4.

Graf 4.4 Výpočet střední hodnoty výnosu



Do uzlů v čase T jsou vloženy hodnoty bohatství vypočtené pomocí přecenění viz Tab. 4.3.9. Hodnota bohatství v čase $T - 1$ je vypočtena jako součet pravděpodobnostmi vážených hodnot v čase T . Pravděpodobnosti uskutečnění jednotlivých uzlů uvádí graf 4.2. V uzlu uu je

tedy hodnota bohatství vypočtena jako $W^{uu} = 0,6 \cdot 1\,285 (W^{uuu}) + 0,4 \cdot 989 (W^{uud})$. Tímto způsobem je vypočtena hodnota bohatství pro všechny uzly a hodnota $E(W_T)$ v čase $t = 0$ je výslednou střední hodnotou bohatství dynamicky optimalizovaného portfolia. Dle grafu 4.4 je střední hodnota bohatství investora ve výši **1 037 tis. Kč**.

4.4. Porovnání flexibilní a pasivní strategie v tržních podmínkách

Transakční náklady související s aktivními zásahy do portfolia ve výši 1% z celkového objemu obchodů (ať už se jedná o nákup nebo prodej akcií), snižují hodnotu výsledného bohatství. Je otázkou, zda tyto náklady ovlivní konečné bohatství investora natolik, aby aktivní zásahy postrádaly smysl.

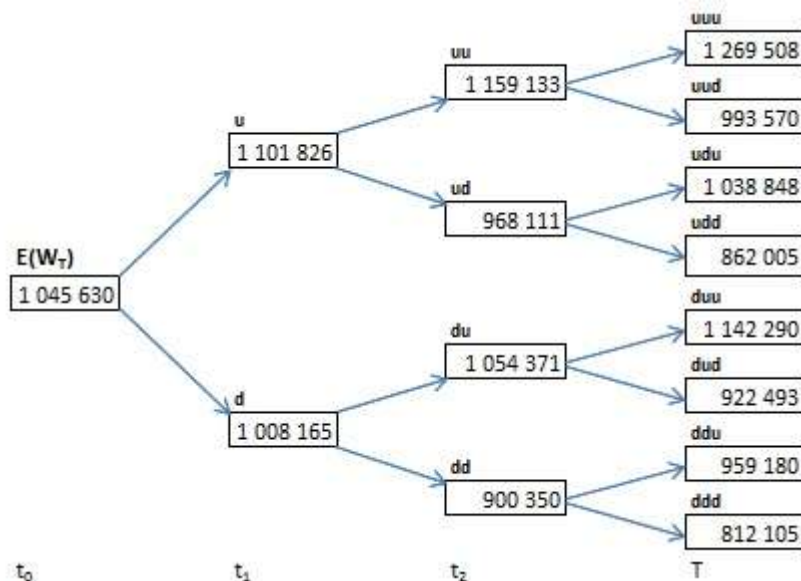
Výsledné hodnoty bohatství a střední hodnota bohatství dosažená aplikací flexibilní strategie byla uvedena v předchozí kapitole. Nyní je potřeba zjistit hodnoty výsledného bohatství a střední hodnotu bohatství za předpokladu, že investor nebude provádět v celém investičním horizontu žádné zásahy. Hodnoty bohatství za předpokladu aplikace pasivní strategie v jednotlivých scénářích uvádí Tab. 4.4.1.

Tab. 4.4.1 Hodnota portfolií ve všech scénářích v čase T (pasivní strategie)

Akcie	$k_{i,0}$	$W^{uuu}_{i,T}$	$W^{uud}_{i,T}$	$W^{udu}_{i,T}$	$W^{udd}_{i,T}$	$W^{duu}_{i,T}$	$W^{dud}_{i,T}$	$W^{ddu}_{i,T}$	$W^{ddd}_{i,T}$
Exxon	0	0	0	0	0	0	0	0	0
McD	344	745 721	692 679	702 984	652 982	724 042	672 542	682 547	633 999
ČEZ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tabák	0	0	0	0	0	0	0	0	0
VIG	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Intel	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AAA	2 800	95 508	65 539	70 756	48 554	82 274	56 458	60 952	41 826
ČS	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MicrSft	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CETV	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Orco	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Erste	200	259 828	101 102	124 585	48 477	182 091	70 853	87 311	33 974
KB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
VW	35	168 452	134 250	140 523	111 992	153 884	122 640	128 371	102 307
		1 269 508	993 570	1 038 848	862 005	1 142 290	922 493	959 180	812 105

K výpočtu střední hodnoty bohatství dosaženého aplikací pasivní strategie nyní opět využijeme stromu scénářů, jako v kap. 4.3.3

Graf 4.5 Výpočet střední hodnoty výnosu (pasivní strategie)



Očekávaná hodnota portfolia, které nebylo dynamicky optimalizováno během investičního horizontu, má hodnotu **1 046 tis. Kč**. Na první pohled je tedy pasivní strategie při tvorbě portfolia mnohem výhodnější a výnosnost nevyvažovaných portfolií vyšší. Kompletní srovnání je uvedeno v Tab. 4.4.2.

Tab. 4.4.2 Hodnota portfolií ve všech scénářích v čase T a střední hodnota bohatství

Strategie	$W_{uuu, T}$	$W_{uud, T}$	$W_{udu, T}$	$W_{udd, T}$	$W_{duu, T}$	$W_{dud, T}$	$W_{ddu, T}$	$W_{ddd, T}$
Flexibilní	1 285 312	989 439	988 767	868 778	1 106 779	949 761	927 080	815 486
Pasivní	1 269 508	993 570	1 038 848	862 005	1 142 290	922 493	959 180	812 105

Strategie	$E(W_T)$
Flexibilní	1 036 950
Pasivní	1 045 630

Na základě Tab. 4.4.2 se nabízí závěr, že aplikací flexibilní strategie při optimalizaci akciového portfolia nelze dosáhnout takových výsledků, jako aplikací strategie pasivní. Pro potvrzení, či vyvrácení tohoto tvrzení budou dosažené výsledky podrobeny další analýze.

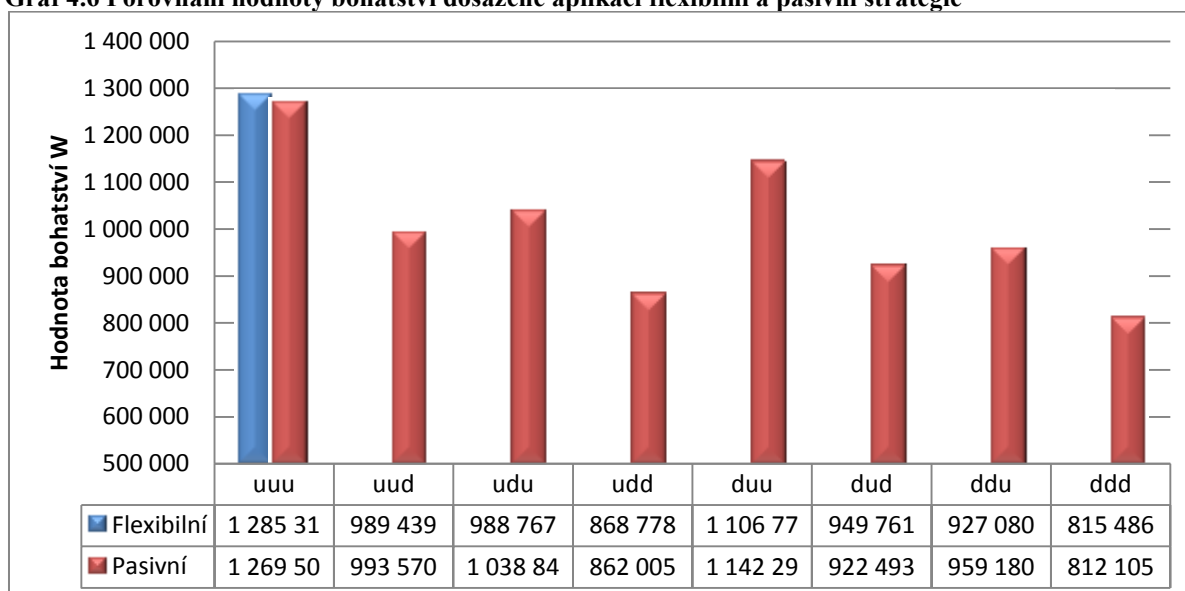
4.5. Analýza výsledků dosažených aplikací flexibilní a pasivní strategie

V této kapitole budou analyzovány výsledky dosažené aplikací flexibilní strategie, tedy modelu dynamické optimalizace portfolia a pasivní strategie, tj. klasického Markowitzova modelu. První podkapitola se bude zabývat analýzou výsledků dosažených v kapitolách 4.1 až 4.4. Další podkapitoly budou analogií citlivostní analýzy. V těchto podkapitolách totiž budou ceteris paribus měněny některé vstupní údaje.

4.5.1. Flexibilní a pasivní strategie v tržních podmínkách

Pro zjištění, zda je vhodné portfolio dynamicky optimalizovat, či nikoliv, nestačí pouze vypočítat střední hodnoty bohatství dosaženého flexibilní a pasivní strategií a tyto hodnoty porovnat. Je potřeba také zanalyzovat, ve kterých scénářích měla dynamická optimalizace pozitivní dopad na hodnotu bohatství investora a ve kterých scénářích bylo naopak vhodné držet portfolio sestavené v původním uzlu. Teprve na základě této analýzy lze strategie objektivně zhodnotit. Výsledky flexibilní a pasivní strategie již byly uvedeny v Tab. 4.4.2. V grafu 4.6 můžeme vidět porovnání hodnoty bohatství, dosažené aplikací flexibilní a pasivní strategie v jednotlivých uzlech.

Graf 4.6 Porovnání hodnoty bohatství dosažené aplikací flexibilní a pasivní strategie



Z grafu 4.6 je patrné, že výhodnost pasivní strategie není tak jednoznačná. Mnohem vyšší hodnotu mají pouze tři portfolia (*udu*, *duu* a *ddu*), přičemž scénář *duu* má dle rozložení pravděpodobností nejvyšší pravděpodobnost uskutečnění. Střední hodnota bohatství investora je tedy zásadní způsobem ovlivněna zejména pravděpodobnostmi danými jednotlivým scénářům.

Dále je zřejmé, že dynamickou optimalizací lze dosahovat lepších výsledků v případě, že tržní index a na něj navázané ceny akcií po provedení optimalizace klesá. Pokud trh roste, je většinou výnosnější portfolio v jednotlivých fázích investičního horizontu nevyvažovat. To ovšem neplatí pro scénář *uuu*. V případě uskutečnění tohoto scénáře bylo výnosnější portfolio v uzlech *u* a *uu* vyvážit, resp. využít flexibilní strategii.

4.5.2. Flexibilní a pasivní strategie při vysoké volatilitě trhu jako celku

Cena akcií je významným způsobem ovlivňována pohybem tržního indexu. V předchozím případě bylo stanoveno, že se tržní index RM bude pohybovat v čase t_1 o +10% do uzlu u a o -10% do uzlu d , následně poroste o 20% do uzlů uu a du nebo bude klesat o 20% do uzlů ud a dd , a nakonec vzroste o 25% do uzlů uuu , udu , duu a ddu nebo bude klesat o 25% do uzlů uud , udd , dud a ddd . Pakliže změníme volatilitu tržního indexu na $\pm 40\%$ v čase t_1 , $\pm 20\%$ v čase t_2 a $\pm 35\%$ v čase T , přičemž citlivost akcií na tomto indexu zůstane nezměněna, budou hodnoty výsledného bohatství následující.

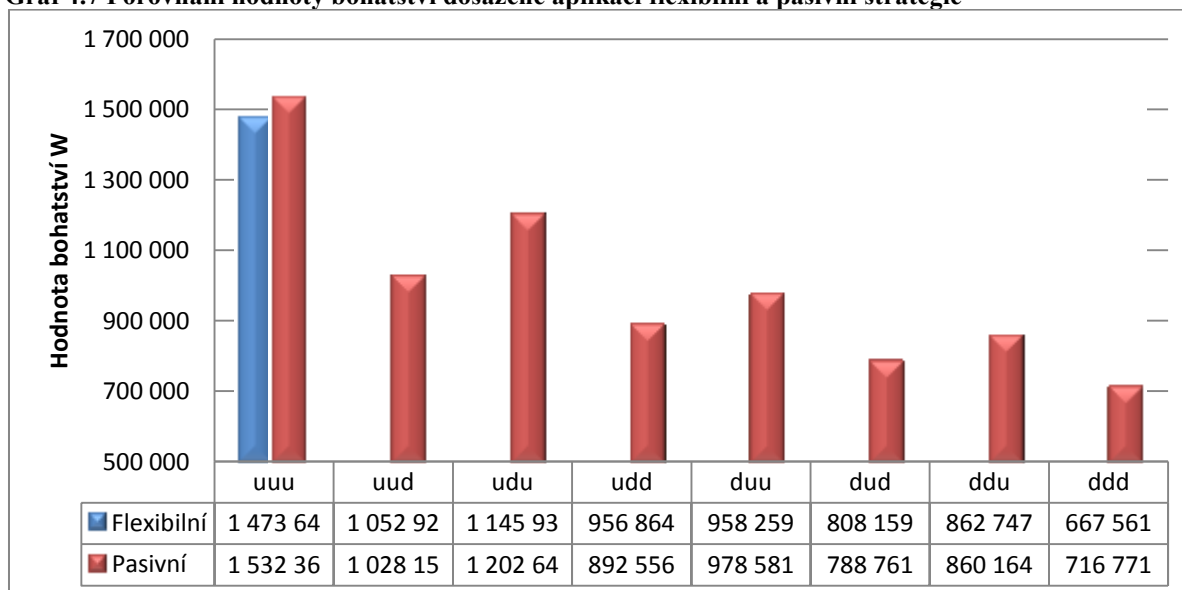
Tab. 4.5.1 Hodnota portfolií ve všech scénářích v čase T a střední hodnota bohatství

Strategie	$W_{i,T}^{uuu}$	$W_{i,T}^{uud}$	$W_{i,T}^{udu}$	$W_{i,T}^{udd}$	$W_{i,T}^{duu}$	$W_{i,T}^{dud}$	$W_{i,T}^{ddu}$	$W_{i,T}^{ddd}$
Flexibilní	1 473 643	1 052 924	1 145 931	956 864	958 259	808 159	862 747	667 561
Pasivní	1 532 364	1 028 155	1 202 648	892 556	978 581	788 761	860 164	716 771

Strategie	$E(W_T)$
Flexibilní	1 012 429
Pasivní	1 025 643

Z Tab. 5.5.1 lze vyčíst, že rozptyl výsledných hodnot bohatství se zvýšil a střední hodnota portfolií dosažených aplikací flexibilní a pasivní strategie se mírně snížila. Stejně jako v případě optimalizace v tržních podmínkách je na první pohled výnosnější pasivní strategie. Nyní tato data převedeme do grafu.

Graf 4.7 Porovnání hodnoty bohatství dosažené aplikací flexibilní a pasivní strategie



V grafu 4.7 můžeme vidět velmi podobný výsledek, jako v případě optimalizace v tržních podmínkách. Dynamicky optimalizovaná portfolia dosahují lepších výsledků v případě poklesu trhu v čase T . Jedinou výjimkou je portfolio *ddd*, jehož hodnota je při využití pasivní strategie vyšší, než při využití strategie flexibilní.

4.5.3. Flexibilní a pasivní strategie za předpokladu vysoké citlivosti akcií

Další faktor, který významným způsobem ovlivňuje cenu akcií, je citlivost akcií na změnu pohybu tržního indexu. Nyní ověříme, jak ovlivní změna koeficientu β jednotlivých akcií celkový výsledek. Koeficienty β jsou změněny tak, aby byly ceny akcií velmi citlivé na pohyb tržního indexu. Některé akcie jsou stanoveny jako pozitivně korelované, několik akcií je rovněž negativně korelovaných. Změnu citlivostí znázorňuje Tab. 4.5.2.

Tab. 4.5.2 Změna citlivosti akcií na pohyb tržního indexu

Akcie	Exxon	McD	ČEZ	O2	Tabák	VIG	Intel	AAA	ČS	MicrSft	CETV	Orco	Erste	KB	VW
β původní	0,15	0,15	1,00	0,55	0,48	0,88	0,39	0,74	0,21	0,25	1,59	0,79	1,76	1,14	0,45
β nová	1,85	1,85	-3,00	-2,55	1,52	-2,88	1,61	-2,74	1,79	1,75	-3,59	-2,79	-3,76	-3,14	1,55

Hodnoty výsledného bohatství v jednotlivých scénářích a střední hodnotu bohatství uvádí Tab. 4.5.3.

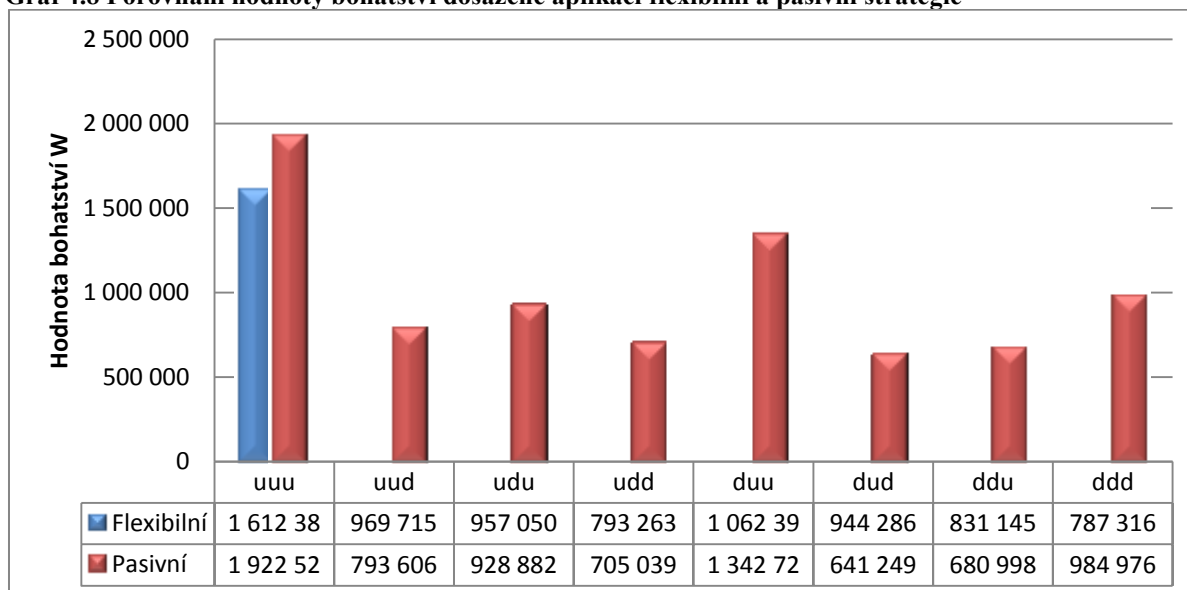
Tab. 4.5.3 Hodnota portfolií ve všech scénářích v čase T a střední hodnota bohatství

Strategie	$W_{i,T}^{uuu}$	$W_{i,T}^{uud}$	$W_{i,T}^{udu}$	$W_{i,T}^{udd}$	$W_{i,T}^{duu}$	$W_{i,T}^{dud}$	$W_{i,T}^{ddu}$	$W_{i,T}^{ddd}$
Flexibilní	1 612 388	969 715	957 050	793 263	1 062 395	944 286	831 145	787 316
Pasivní	1 922 526	793 606	928 882	705 039	1 342 725	641 249	680 998	984 976

Strategie	$E(W_T)$
Flexibilní	1 059 287
Pasivní	1 103 152

Střední hodnota bohatství dosažená aplikací flexibilní strategie, je o 44 tis. Kč nižší, než hodnota portfolia statického. Na první pohled je také zřejmé, že hodnoty portfolií dosažených dynamickou optimalizací nejsou tak rozptýlené, jako v případě statického přístupu. Nyní porovnáme tyto strategie graficky.

Graf 4.8 Porovnání hodnoty bohatství dosažené aplikací flexibilní a pasivní strategie



Z grafu 4.8 je patrné, že flexibilní strategii bylo opět dosaženo lepších výsledků při poklesu hodnoty portfolia. Z tohoto grafu je také zřejmé, že využitím flexibilní strategie investor významně snižuje investiční riziko (ve své negativní i pozitivní podobě). Investor se při využití flexibilní strategie zajišťuje před velkými ztrátami, ale zároveň přichází o možnost generovat vysoké zisky. Je velmi pravděpodobné, že využitím flexibilní strategie bude investor vlastnit portfolio, které sice bude v zisku, nicméně tento zisk bude velmi nízký. Nezpochybnitelnou výhodou je ale nízká citlivost portfolia na změny tržních podmínek.

4.6. Shrnutí výsledků

Pro vyřešení problému dynamické optimalizace portfolia bylo vybráno 15 akciových titulů obchodovaných na české burze cenných papírů (*RM-systém*). Byl stanoven tříletý investiční horizont v období od 8. 4. 2013 do 8. 4. 2016 s možností provádění aktivních zásahů v diskretních jednoletých intervalech. Prvním krokem vedoucím k dynamické optimalizaci, byl propočet předpokládaných budoucích cen vybraných akciových titulů v letech 2014 až 2016 v osmi scénářích. K propočtu byl využit tržní index *RM* a citlivost jednotlivých akcií na změnu hodnoty tohoto indexu. Tyto vstupní údaje byly stanoveny tak, aby reflektovaly tržní podmínky. Volatilita tržního indexu byla stanovena umírněně v rozmezí 10% až 25% v jednotlivých fázích investičního procesu, citlivost akcií na tržním indexu byla vypočtena z denních historických dat za posledních pět let a pravděpodobnosti jednotlivých scénářů vycházely z výhledu HDP pro následující roky, vytvořeného analytiky ČNB.

Následně bylo sestaveno optimální portfolio pomocí Markowitzova modelu, které bylo v osmi možných scénářích vyvažováno pomocí nákupů a prodejů akcií tak, aby bylo v každé fázi optimální. Brzdou tohoto vyvažování byly pouze transakční náklady, které snižovaly výsledné bohatství. Na konci investičního horizontu byly zjištěny hodnoty portfolií v těchto scénářích a rekurentním způsobem byla vypočtena střední hodnota bohatství.

V další části čtvrté kapitoly byly srovnány výsledky dosažené využitím flexibilní a pasivní strategie při optimalizaci portfolia. Za předpokladu původní investice ve výši 1 000 tis. Kč bylo dosaženo aplikací flexibilní strategie střední hodnoty bohatství ve výši 1 037 tis. Kč. Pokud investor využil pasivní strategii, jeho střední hodnota bohatství na konci investičního horizontu dosahovala 1 047 tis. Kč. Na základě těchto výsledků není flexibilní strategie vhodným nástrojem k optimalizaci akciového portfolia.

V poslední části diplomové práce byly výsledky dosažené aplikací flexibilní a pasivní strategie dále analyzovány. Nejprve byla analyzována vhodnost využití obou strategií v jednotlivých scénářích v tržních podmínkách. Bylo zjištěno, že dynamickou optimalizací lze dosahovat lepších výsledků v případě, že tržní index a na něj navázané ceny akcií po provedení optimalizace klesá. Pokud trh roste, je většinou výnosnější portfolio v jednotlivých fázích investičního horizontu nevyvažovat. Další analýza byla provedena pro zjištění výsledků v případě, že se změní volatilita tržního indexu. Volatilita tržního indexu byla změněna dle Tab. 4.6.1

Tab. 4.6.1 Změna volatility tržního indexu

Akcie	u_{n+1}	d_{n+1}	u_{n+2}	d_{n+2}	u_{n+3}	d_{n+3}
Rm původní	10%	-10%	20%	-20%	25%	-25%
Rm nové	40%	-40%	20%	-20%	35%	-35%

Následně byla provedena optimalizace portfolia s využitím flexibilní a pasivní strategie. Výsledné bohatství po provedení této změny je jiné než v případě optimalizace v tržních podmínkách, ostatní zjištění jsou ale stejná. Lze tedy konstatovat, že dynamicky optimalizovaná portfolia dosahují lepších výsledků v případě poklesu trhu v čase T . Poslední analýza byla provedena pro zjištění výsledků v případě, že se změní citlivost akcií na pohyb tržního indexu. Změnu citlivosti znázorňuje Tab. 4.6.2.

Tab. 4.6.2 Změna citlivosti akcií na pohyb tržního indexu

Akcie	Exxon	McD	ČEZ	O2	Tabák	VIG	Intel	AAA	ČS	MicrSft	CETV	Orco	Erste	KB	VW
β původní	0,15	0,15	1,00	0,55	0,48	0,88	0,39	0,74	0,21	0,25	1,59	0,79	1,76	1,14	0,45
β nová	1,85	1,85	-3,00	-2,55	1,52	-2,88	1,61	-2,74	1,79	1,75	-3,59	-2,79	-3,76	-3,14	1,55

Po provedení změn ve vstupních datech byla opět provedena optimalizace portfolia s využitím flexibilní a pasivní strategie. Použitím flexibilní strategie bylo stejně jako v předchozích případech dosaženo mnohem lepších výsledků při poklesu trhu v čase T .

Střední hodnota bohatství v případě tří zmíněných tržních situací zobrazuje Tab. 4.6.3

Tab. 4.6.3 Střední hodnota bohatství v jednotlivých scénářích

Scénář	Tržní	Rm	Beta
Flexibilní strategie	1 036 950	1 012 429	1 059 287
Pasivní strategie	1 045 630	1 025 643	1 103 152

Z Tab. 4.6.3 je zřejmé, že střední hodnota bohatství je ve všech scénářích vyšší při aplikaci pasivní strategie. Tato strategie je proto v daných modelových situacích výhodnější.

Flexibilní strategie při optimalizaci portfolia je zajímavou alternativou ke klasické pasivní strategii. Je vhodná zejména pro vysoce rizikově averzní investory, jelikož vyvažováním portfolia v průběhu investičního horizontu investor velmi zásadním způsobem snižuje riziko vysokých ztrát. Střední hodnota bohatství je při aplikaci této strategie nižší, než v případě pasivní strategie, což odpovídá nižšímu riziku. Pro investora s menší averzí k riziku je aplikace flexibilní strategie nevhodná. Vyvažováním portfolia v průběhu investičního horizontu se totiž připravuje o možnost generování vysokého zisku. Investor s menší averzí k riziku by tedy využil pasivní strategii optimalizace akciového portfolia.

5. Závěr

Cílem této diplomové práce bylo porovnání a posouzení výhodnosti flexibilní dynamické optimalizační strategie s pasivní strategií „*buy and hold*“ při optimalizaci akciového portfolia pro tři modelové situace v tříletém investičním horizontu, přičemž kritériem hodnocení byla střední hodnota funkce užitku.

V první kapitole byly charakterizovány akcie a jednotlivé přístupy k jejich analýzám. Dále byla popsána teorie portfolia a klasické přístupy k optimalizaci portfolia, přičemž detailně byl popsán zejména model Harryho Markowitze, který je základním kamenem všech optimalizačních portfolio modelů.

V následující kapitole byl popsán problém dynamického programování a vysvětlen princip této matematické metody. V této kapitole byly uvedeny také příklady modelů, které tuto matematickou metodu využívají k různým účelům. Nejznámější model využívající dynamické programování je binomický model oceňování derivátů, který byl v této kapitole odvozen pro výpočet ceny opcí a derivátů na úrokové sazby. Méně známými modely založenými na dynamickém programování, jsou vícefázové portfolio modely. Dva modely tohoto typu byly rovněž popsány a odvozeny v této kapitole. Stěžejní oddíl kapitoly je její poslední část, ve které byl navržen model dynamické optimalizace akciového portfolia, jež byl v praktické části této diplomové práce aplikován.

V praktické části této práce byl aplikován dynamický přístup k optimalizaci akciového portfolia. Nejprve byla popsána modelová situace vycházející z tržních podmínek. Na scénáři předpokládaných tržních podmínek byl vysvětlen postup aplikace dynamického programování, jinak také označovaného jako flexibilní strategie při optimalizaci akciového portfolia. V první části aplikace bylo vytvořeno původní portfolio, které bylo tzv. „dopředným“ (forward) způsobem optimalizováno ve dvou fázích investičního horizontu. Výsledná střední hodnota bohatství při využití flexibilní strategie, vypočtena rekurentním (backward) způsobem, byla v další části této kapitoly porovnána s výslednou střední hodnotou bohatství, dosaženou aplikací pasivní strategie. Poslední část této kapitoly byla věnována hlubší analýze výsledků dosažených využitím flexibilní a pasivní strategie při aplikaci modelových situací předpokládaných tržních podmínek, vysoké volatility tržního indexu a vysoké citlivosti akcií na tržním indexu.

Střední hodnota bohatství, v případě modelové situace vycházející z tržních podmínek, má při aplikaci flexibilní strategie hodnotu 1 037 tis. Kč. Aplikací pasivní strategie přitom investor dosahuje vyššího výnosu se střední hodnotou bohatství ve výši 1 046 tis. Kč. Výsledné bohatství v případě modelové situace se zvýšenou volatilitou tržního indexu je rovněž vyšší při využití pasivní strategie. Aplikací této strategie dosahuje investor střední hodnoty bohatství ve výši 1 026 tis. Kč, oproti 1 012 tis. Kč při využití dynamické optimalizace. V případě třetí modelové situace se zvýšenou citlivostí akcií na tržním indexu, dosahuje investor při využití flexibilní strategie opět výrazně nižšího výnosu. Kompletní shrnutí výsledků je uvedeno v kapitole. 4.6.

Flexibilní strategie při optimalizaci portfolia je zajímavou alternativou ke klasické pasivní strategii. Z výsledků této diplomové práce ale vyplývá, že je vhodná pouze pro investory s velkou averzí k riziku. Vyvažováním portfolia v průběhu investičního horizontu investor velmi zásadním způsobem snižuje riziko vysokých ztrát, ale zároveň přichází o možnost realizace vysokých výnosů. Pro investory s menší averzí k riziku je z tohoto důvodu aplikace flexibilní strategie nevhodná.

Seznam použité literatury

a) Odborné knihy

AMBROŽ, Luděk. *Oceňování opcí*. Praha: C. H. Beck, 2002. 313 s. ISBN 80-7179-531-3

DLUHOŠOVÁ, Dana. *Finanční řízení a rozhodování podniku*. 2. vyd. Praha: Ekopress, 2008. 192 s. ISBN 978-80-86929-44-6

FABOZZI, Frank, Sergio FOCARDI a Petter COLM. *Financial modeling of the equity market*. New Jersey: John Wiley & sons, Inc., 2006. 651 p. ISBN 13 978-0471-69900-2.

JÍLEK, Jiří. *Akciové trhy a investování*. Praha: GRADA Publishing, 2009. 656 s. ISBN 978-80-247-2963-3.

KLAPKA, Jindřich. *Dynamické programování*. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1970. 83 s. ISBN 411-33873

MUSÍLEK, Petr. *Trhy cenných papírů*. Praha: Ekopress, 2002. 459 s. ISBN 80-86119-55-6

PFLUG, Georg a Werner ROMISCH. *Modeling measuring and managing risk*. Singapore: World scientific publishing Co. Pte. Ltd., 2007. 286 p. ISBN 13 978-981-270-740-6.

POLÁCH, Jiří, Petr GERLICH a kol. *Bankovníctví a kapitálové trhy, Část - Kapitálové trhy*. Ostrava: VŠB – TUO, Ekonomická fakulta, 1999. 169 s. ISBN 80-7078-641-8

ROHN, Jiří. *Lineární algebra a optimalizace*. Praha: Karolinum, 2004. 199 s. ISBN 80-246-0932-0

SHARPE, William a Gordon J. ALEXANDER. *Investice*. 4. vyd. Praha: Victoria Publishing, 1994. 810 s. ISBN 80-85605-47-3.

STRONG, Robert. *Portfolio Construction, Management and Protection*. 5. Vyd. Mason: Cengage learning, 2009. 704 p. ISBN 0-32466510-9

ZMEŠKAL, Zdeněk. a kol. *Finanční modely*. Praha: Ekopress, 2004. 236 s. ISBN 80-86119-87-4.

b) Elektronické dokumenty – odborné články

FULGA, Cristinca. *Multistage Portfolio Optimization*. In: SAKALAUSKAS, L., C. SKIADAS a E. K. ZAVADSKAS eds. *Sborník z XIII mezinárodní konference „Applied*

Stochastic Models and Data Analysis". Vilnius: Institute of Mathematics and Informatics, 2009. pp. 497–501. ISBN 978-9955-28-463-5. Dostupné z:

http://leidykla.vgtu.lt/conferences/ASMDA_2009/PDF/22_sec_102_Fulga_Multistage.pdf

GÜLPMAR, Nalan, Berc RUSTEM a Reuben SETTERGREN. *Multistage Stochastic Mean-Variance Portfolio Analysis with Transaction Costs*. London, 2004. Imperial College of Science, Technology and Medicine. Dostupné z:

[http://www.doc.ic.ac.uk/~br/papers/chocolate\(17May04\).pdf](http://www.doc.ic.ac.uk/~br/papers/chocolate(17May04).pdf)

c) Elektronické dokumenty – ostatní

Zákon č. 513/1991 Sb., obchodního zákoníku. Část druhá: Obchodní společnosti a družstvo. Hlava I: Obchodní společnosti. Díl V: Akciová společnost. Dostupný z:

<http://business.center.cz/business/pravo/zakony/obchzak/cast2h1d5.aspx#par155>

ČESKÁ NÁRODNÍ BANKA. ČNB: *Makroekonomické prognózy ze dne 6. února 2013* [online]. ČNB [6. 2. 2013]. Dostupné z:

http://www.cnb.cz/cs/menova_politika/prognoza/index.html

Ceny akcií a tržního indexu dostupné z:

<http://www.rmsystem.cz/vysledky/historie-obchodovani/souhrnne-statistiky>

Seznam zkratek

CAPM	Model oceňování kapitálových aktiv (Capital assets pricing model)
ČNB	Česká Národní banka
HDP	Hrubý domácí produkt
u	Pohyb směrem vzhůru (UP)
d	Pohyb směrem dolů (DOWN)
$QP(W)$	Kvadratické programování (Quadratic Programming)
Exxon	Akcie Exxon Mobil Corp.
McD	Akcie McDonald's Corp.
ČEZ	Akcie ČEZ, a.s.
O2	Akcie Telefonica O2 Czech. Rep.
Tabák	Akcie Philip Morris ČR
VIG	Akcie Vienna Insurance Group
Intel	Akcie Intel Corp.
AAA	Akcie AAA Auto Group N.V.
Čspoř	Akcie Česká spořitelna, a.s.
MicrSft	Akcie Microsoft Corp.
CETV	Akcie Central European Media Enterprises Ltd.
Orco	Akcie ORCO Property Group S.A.
Erste	Akcie Erste Group Bank AG
KB	Akcie Komerční banka, a.s.
VW	Akcie Volkswagen AG

Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo;

- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně, ke své vnitřní potřebě, diplomovou práci užít (§ 35 odst.3);

- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě archivována v Ústřední knihovně VŠB-TUO a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že bibliografické údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO;

- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;

- bylo sjednáno, že užít své dílo, diplomovou práci, nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě dne

26.4.2013



Tomáš Uvíra

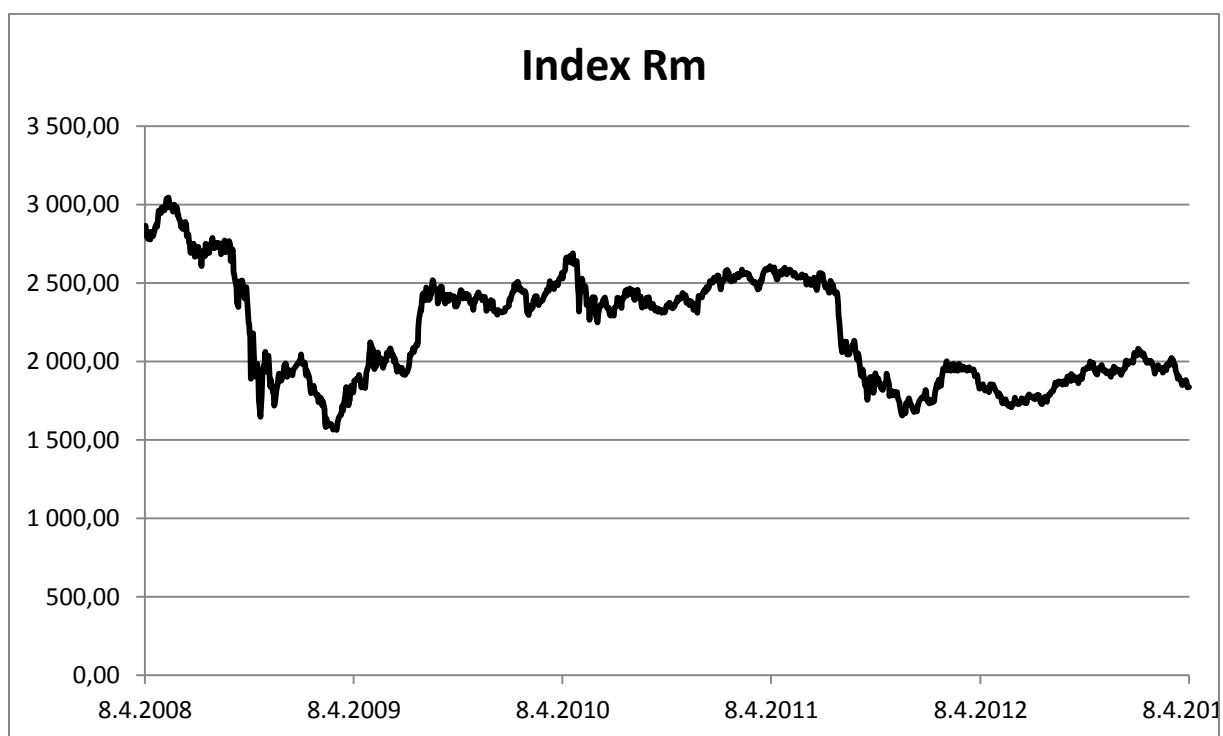
.....
jméno a příjmení studenta

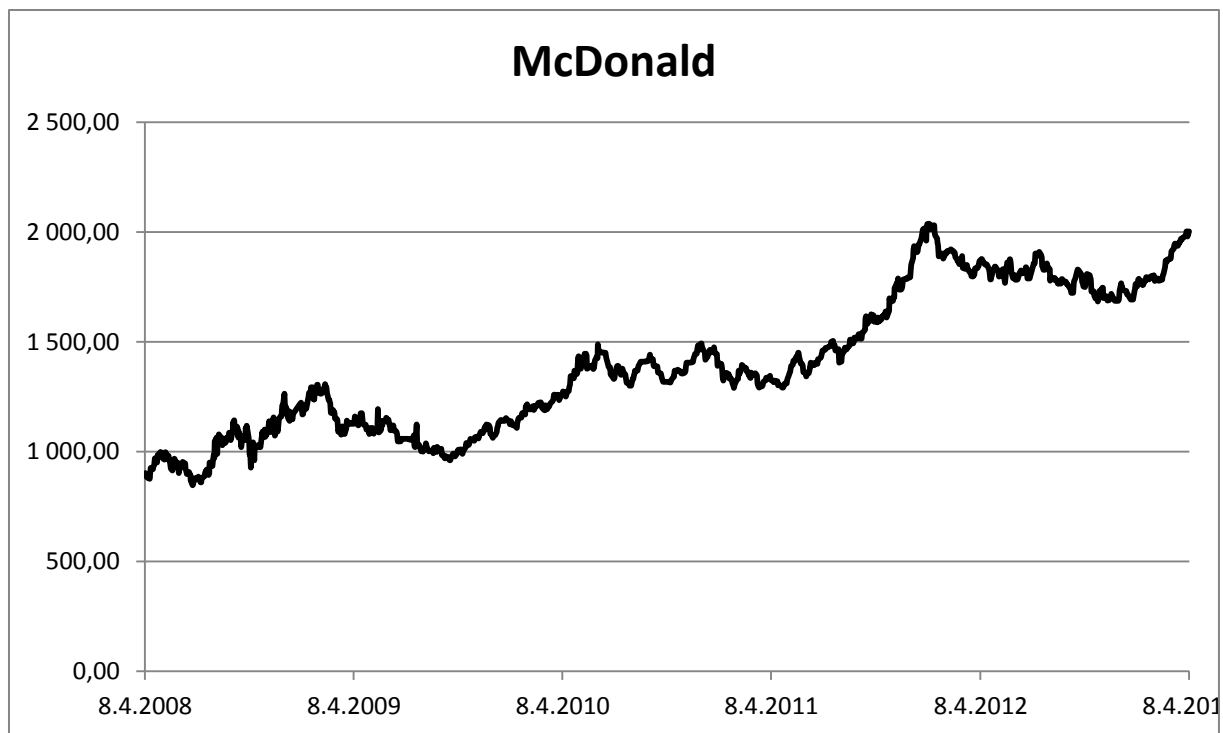
Seznam příloh

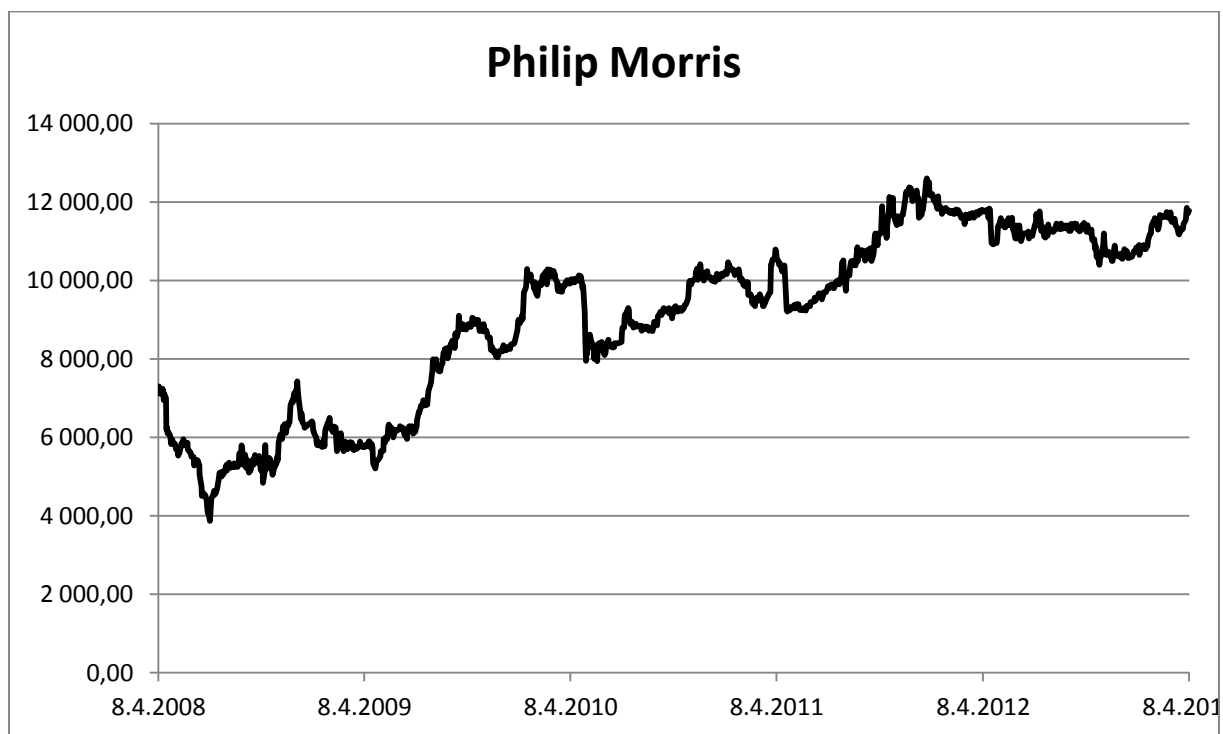
Příloha č. 1 - Grafy historického vývoje vybraných akcií.

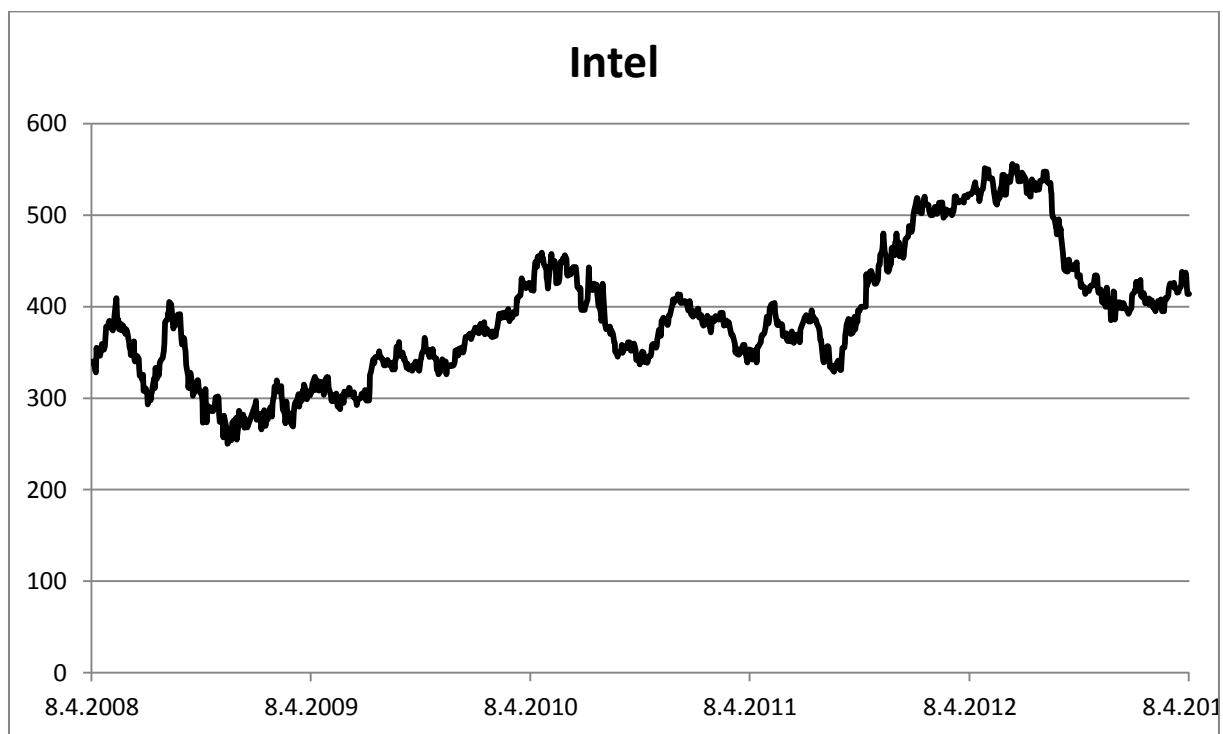
Příloha č. 2 – Vypočtené ceny akcií v uzlech u , d , uu , ud , du , dd , uuu , uud , udu , udd , duu , dud , ddu a ddd pro variantu tržních podmínek.

Příloha č. 3 - Výsledné vektory a parametry uzlů u , d , uu , ud , du a dd .

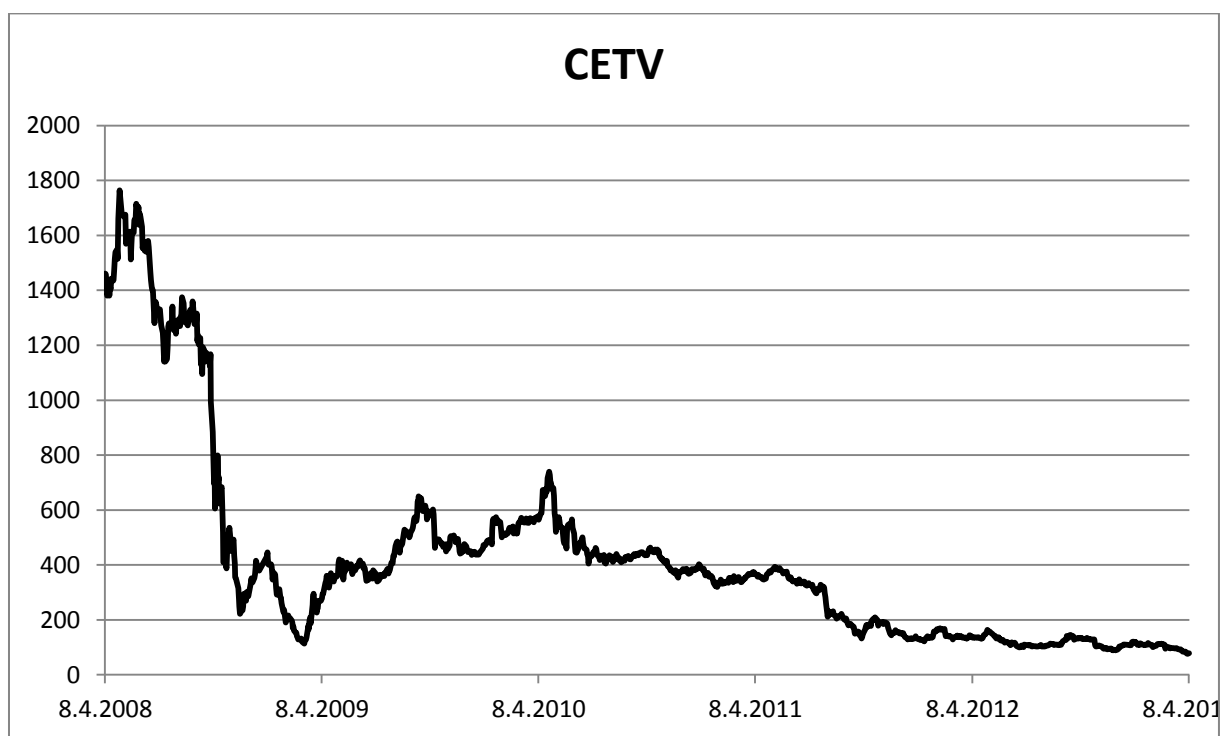
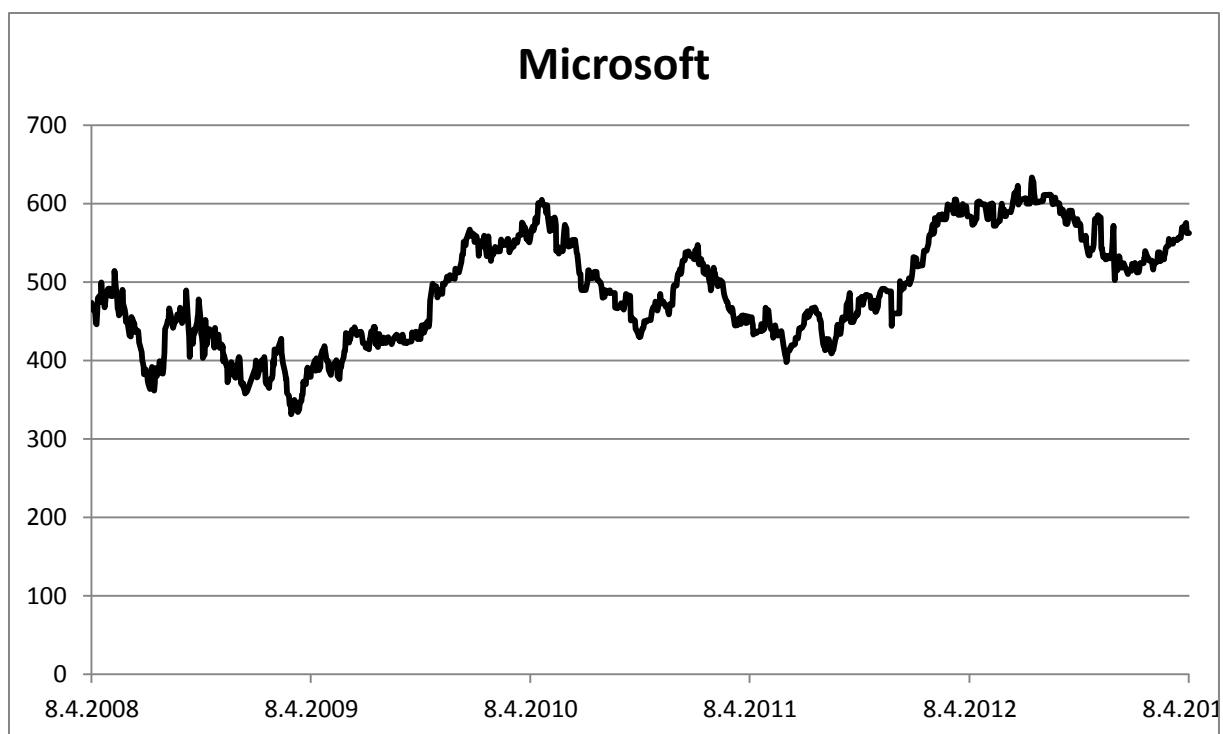
Příloha č. 1 - Grafy historického vývoje vybraných akcií

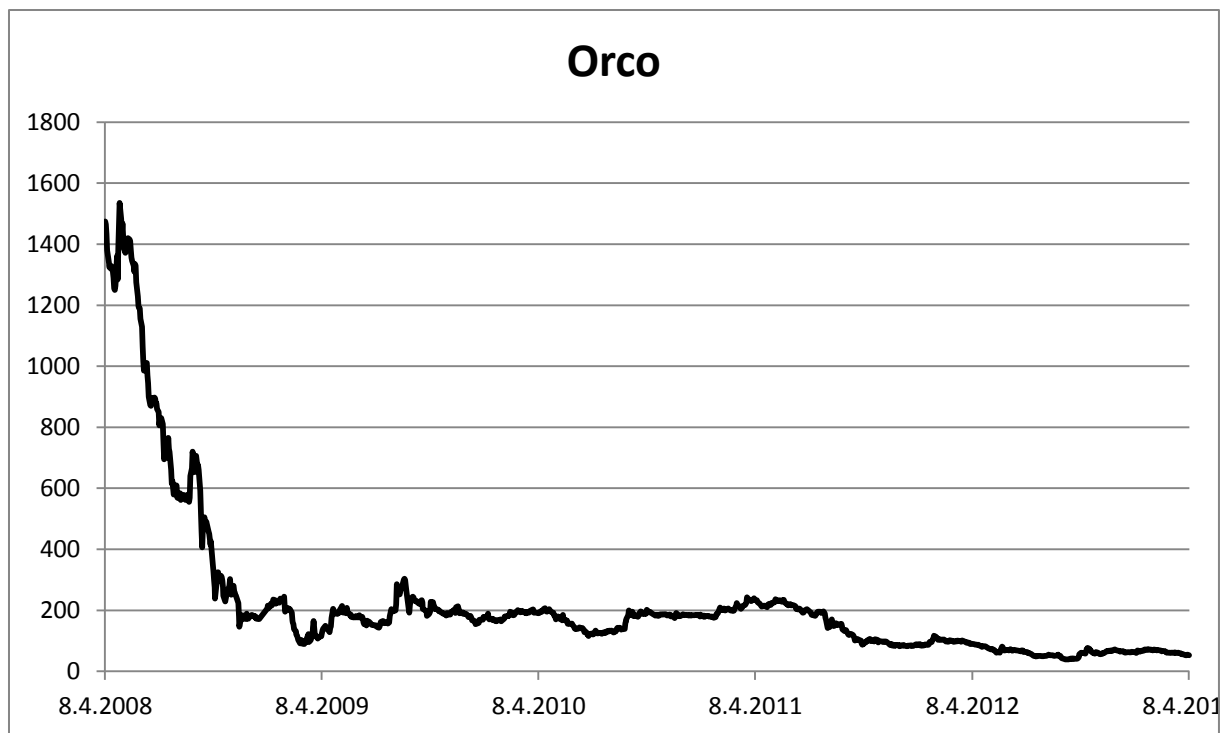














Příloha č. 2 – Vypočtené ceny akcií v uzlech u , d , uu , ud , du , dd , uuu , uud , udu , udd , duu , dud , ddu a ddd pro variantu tržních podmínek

Čas	$t=0$	$t=1$		$t=2$				T							
Akcie	8.4.2013	u	d	uu	ud	du	dd	uuu	uud	udu	udd	duu	dud	ddu	ddd
Exxon	1 770	1 797	1 743	1 851	1 743	1 796	1 691	1 920	1 781	1 808	1 677	1 863	1 728	1 754	1 627
McD	2 003	2 033	1 973	2 093	1 973	2 032	1 915	2 170	2 015	2 045	1 900	2 107	1 957	1 986	1 845
ČEZ	576	634	518	761	507	622	414	952	570	634	379	778	466	518	310
O2	283	299	267	331	266	297	238	377	286	302	229	337	256	271	206
Tabák	11 780	12 342	11 218	13 520	11 164	12 288	10 147	15 132	11 907	12 496	9 833	13 754	10 823	11 358	8 937
VIG	960	1 045	875	1 229	861	1 030	721	1 499	958	1 050	671	1 256	803	880	562
Intel	414	430	398	464	396	429	366	510	418	435	357	471	387	402	330
AAA	23	25	22	29	21	25	18	34	23	25	17	29	20	22	15
ČS	850	868	832	904	832	867	798	951	857	875	788	912	822	839	756
MicrSft	562	577	548	606	547	576	520	644	567	582	513	612	539	553	487
CETV	79	91	66	120	62	87	45	168	72	87	37	122	52	63	27
Orco	53	58	49	67	48	57	41	80	53	58	39	68	46	49	33
Erste	569	669	469	904	434	634	304	1 302	507	624	243	913	355	438	170
KB	3 743	4 169	3 316	5 119	3 219	4 072	2 561	6 577	3 661	4 136	2 302	5 232	2 912	3 290	1 831
VW	3 755	3 925	3 585	4 279	3 570	3 909	3 261	4 763	3 796	3 973	3 167	4 351	3 468	3 630	2 893

Příloha č. 3 - Výsledné vektory a parametry uzlů u , d , uu , ud , du a dd .*Výsledný vektor a parametry uzlu u*

Akcie	$x_{i,t}$	$k_{i,t}$	$w_{i,t}$	Parametr	Hodnota
Exxon	0%	0	0	$E(r_p)$	13%
McD	63%	323	657 020	σ_p^2	1%
ČEZ	0%	0	0	σ_p	11%
O2	0%	0	0	c	1%
Tabák	0%	0	0	c^{ABS}	1 842
VIG	0%	0	0		
Intel	0%	0	0		
AAA	2%	744	18 638		
ČS	0%	0	0		
MicrSft	0%	0	0		
CETV	0%	0	0		
Orco	0%	0	0		
Erste	16%	257	171 657		
KB	0%	0	0		
VW	18%	49	191 826		
99,8%		1 039 141			

Výsledný vektor a parametry uzlu d

Akcie	$x_{i,t}$	$k_{i,t}$	$w_{i,t}$	Parametr	Hodnota
Exxon	0%	0	0	$E(r_p)$	12%
McD	68%	330	651 582	σ_p^2	4%
ČEZ	0%	0	0	σ_p	20%
O2	0%	0	0	c	1%
Tabák	0%	0	0	c^{ABS}	529
VIG	0%	0	0		
Intel	0%	0	0		
AAA	6%	2 800	60 378		
ČS	0%	0	0		
MicrSft	0%	0	0		
CETV	0%	0	0		
Orco	0%	0	0		
Erste	11%	229	107 561		
KB	0%	0	0		
VW	14%	39	138 967		
99,9%		958 488			

Výsledný vektor a parametry uzlu uu

Akcie	$x_{i,t}$	$k_{i,t}$	$w_{i,t}$	Parametr	Hodnota
Exxon	0%	0	0	$E(r_p)$	12%
McD	58%	317	664 114	σ_p^2	1%
ČEZ	0%	0	0	σ_p	10%
O2	0%	0	0	c	1%
Tabák	0%	0	0	c^{ABS}	1 654
VIG	0%	0	0		
Intel	0%	0	0		
AAA	0%	0	0		
ČS	0%	0	0		
MicrSft	0%	0	0		
CETV	2%	194	23 269		
Orco	0%	0	0		
Erste	16%	201	182 244		
KB	2%	4	21 994		
VW	22%	57	245 754		
99,9%		1 137 375			

Výsledný vektor a parametry uzlu ud

Akcie	$x_{i,t}$	$k_{i,t}$	$w_{i,t}$	Parametr	Hodnota
Exxon	0%	0	0	$E(r_p)$	5%
McD	24%	112	221 002	σ_p^2	1%
ČEZ	0%	0	0	σ_p	12%
O2	0%	0	0	c	1%
Tabák	0%	0	0	c^{ABS}	10 480
VIG	0%	0	0		
Intel	0%	0	0		
AAA	4%	1 590	33 884		
ČS	53%	602	500 747		
MicrSft	0%	0	0		
CETV	0%	0	0		
Orco	0%	0	0		
Erste	0%	0	0		
KB	0%	0	0		
VW	18%	48	173 139		
98,9%		928 773			

Výsledný vektor a parametry uzlu du

Akcie	$x_{i,t}$	$k_{i,t}$	$w_{i,t}$	Parametr	Hodnota
Exxon	0%	0	0	$E(r_p)$	7%
McD	35%	177	359 316	σ_p^2	2%
ČEZ	0%	0	0	σ_p	12%
O2	0%	0	0	c	1%
Tabák	0%	0	0	c^{ABS}	8 830
VIG	0%	0	0		
Intel	0%	0	0		
AAA	5%	1 896	46 971		
ČS	39%	466	403 552		
MicrSft	0%	0	0		
CETV	0%	0	0		
Orco	0%	0	0		
Erste	3%	53	33 367		
KB	0%	0	0		
VW	18%	47	185 065		
99,1%		1 028 270			

Výsledný vektor a parametry uzlu dd

Akcie	$x_{i,t}$	$k_{i,t}$	$w_{i,t}$	Parametr	Hodnota
Exxon	0%	0	0	$E(r_p)$	5%
McD	30%	140	268 242	σ_p^2	2%
ČEZ	0%	0	0	σ_p	16%
O2	0%	0	0	c	1%
Tabák	0%	0	0	c^{ABS}	8 591
VIG	0%	0	0		
Intel	0%	0	0		
AAA	6%	2 800	51 389		
ČS	48%	533	425 246		
MicrSft	0%	0	0		
CETV	0%	0	0		
Orco	0%	0	0		
Erste	0%	0	0		
KB	0%	0	0		
VW	14%	39	126 405		
99,0%		871 283			